De nouveaux développements asymptotiques combinés pour la perturbation singulière

A. Fruchard et R. Schäfke

19 décembre 2008

1 Introduction.

Nous nous intéressons ici aux équations différentielles singulièrement perturbées de la forme

$$\varepsilon y' = f(x, y, \varepsilon) \tag{1}$$

où x et y sont des variables réelles et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Nous nous intéressons en particulier au comportement des solutions lorsque ε tend vers 0 (ou lorsque ε est i-petit dans le contexte de l'analyse non standard). En un point (x, y) du plan où $f(x, y, 0) \neq 0$ la solution est quasi verticale, vers le haut ou vers le bas suivant le signe de $f(x, y, 0)$. La situation est plus complexe au voisinage de la *variété lente* V, qui est l'ensemble d'équation $f(x, y, 0) = 0$. L'attractivité de V se mesure avec la dérivée de f par rapport à y : un point $(x, y) \in V$ est *attractif* (resp. *répulsif*, resp. *indifférent* ou *tournant*) si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0)$ est négatif (resp. positif, resp. nul). Si $(x^*, y^*) \in V$ est *régulier*, *i.e.* n'est pas tournant, alors le théorème des fonctions implicites implique que localement V est le graphe d'une fonction continue y_0, dite *lente*, vérifiant $y_0(x^*) = y^*$. Lorsqu'on cherche à prolonger une telle fonction y_0, deux situations peuvent se produire. Ou bien on arrive au bord du domaine de définition de y_0 (le cas “générique”), ou bien on arrive à un point tournant, où y_0 est encore définie mais où la courbe lente n'a plus d'attractivité ni de répulsivité.

Le comportement des solutions est bien compris au voisinage des points réguliers. Par exemple, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est relativement facile de montrer que l'équation (1) a une unique solution formelle $\widehat{y} = \sum_{n\geq 0} y_n(x)\varepsilon^n$ en puissances de ε ; il est connu aussi qu'au voisinage d'un point régulier il existe des solutions ayant cette solution formelle comme développement asymptotique. Par ailleurs, la théorie des *développements asymptotiques combinés* classiques [29, 3] permet de décrire la *couche limite* (appelée aussi la couche intérieure) des solutions commençant à longer une courbe lente $y = y_0(x)$ en un point (x^*, y^*) régulier. Par exemple si ce point est attractif, on peut donner une approximation d'une solution $y = y(x, \varepsilon)$, uniforme sur un intervalle $[x^*, x^* + \delta]$, sous la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \Big(y_n(x) + z_n\big(\tfrac{x-x^*}{\varepsilon}\big)\Big)\varepsilon^n$, à l'aide d'une part de la solution formelle $\widehat{y}$ (la partie dite *lente* du développement combiné) et d'autre part de fonctions z_n à décroissance exponentielle à l'infini (la partie *rapide*).

En un point tournant, la méthode la plus répandue pour obtenir une approximation des solutions est le recollement de deux développements dits *intérieur* et *extérieur*. C'est ce qu'on appelle le *matching* dans la littérature anglo-saxonne. Plus qu'une méthode, le matching est une idée très générale, qui regroupe des méthodes diverses dans de nombreuses situations où apparaissent à des équations fonctionnelles (différentielles ordinaires, aux dérivées partielles, etc.)

Le but de cet article est de présenter de nouveaux développements asymptotiques combinés (pour faire court, nous écrirons DAC), particulièrement adaptés aux points tournants des équations singulièrement perturbées de la forme (1). L'avantage de notre approche est de donner une approximation uniforme des solutions dans un intervalle qui contient à la fois des points loin du point tournant et des points dans un petit voisinage de ce point tournant. En dépit du caractère naturel, presque familier, de ces développements, nous n'avons trouvé presque aucune trace de ces développements dans la littérature existante. En particulier leur similitude apparente avec les DAC classiques cache des différences profondes. Les seuls travaux déjà existants ayant une relation avec nos DAC sont ceux de L. A. Skinner [26, 27, 28], de L. E. Fraenkel [13] et de W. Eckhaus [11]. Ces auteurs ont mis en place chacun un formalisme de "composite asymptotic expansions". Par exemple L. E. Fraenkel définit des opérateurs E_p et H_p qui, dans notre contexte, consistent essentiellement à prendre les p premiers termes du développement extérieur, resp. intérieur, d'une fonction $f = f(x, \varepsilon)$. Il montre ensuite que la fonction $(E_p + H_p - E_pH_p)f$ est une approximation à l'ordre p de f en ε uniformément pour $x \in [0, r]$. Si l'on répartit judicieusement les termes de E_pH_pf pour en regrouper certains avec E_pf et d'autres avec H_pf, le résultat semble être les premiers termes d'un DAC pour f. Toutefois L. E. Fraenkel ne fait pas une étude systématique de ces opérateurs. Il démontre cette approximation uniforme en faisant l'hypothèse a priori que f admet une approximation intérieure et une approximation extérieure et que les régions de validité s'intersectent ("overlapping assumption"). Il ne montre pas la stabilité de ces développement par produit, dérivation, intégration ou composition à gauche ou à droite par les fonctions d'une variable. Par ailleurs, seules des sommes finies sont prises en compte. Enfin l'aspect Gevrey, indispensable pour les applications à la perturbation singulière, est absent.

Contenu de l'article.

Dans une première partie, nous présentons des exemples, les plus simples possibles, qui montrent que les solutions d'équations singulièrement perturbées ont naturellement des DAC près des points tournants.

La définition générale des DAC et leurs premières propriétés sont présentées dans la partie 3.1. La partie 3.2 établit une comparaison de ces DAC avec le matching. Dans la partie 3.3, nous présentons la notion de DAC Gevrey, qui est une notion incontournable pour une étude approfondie des équations singulièrement perturbées. Cette étude est faite dans la partie 4. Enfin en application, nous mettons en œuvre notre théorie pour la résolution d'un problème de canard en un point tournant dégénéré (partie 4.4) et d'un problème de résonance au sens d'Ackerberg-O'Malley (partie 5).

Dans cet article, dans un soucis de clarté et de simplicité, les résultats sont présentés dans le cadre réel. Cependant nous insistons sur le fait que la théorie ne peut pas se passer du cadre complexe. Les preuves des résultats énoncés ici sont présentées dans le mémoire [17]. Pour ces preuves, il est indispensable de considérer x et ε comme des variables du champ complexe. C'est la raison pour pour laquelle nous avons été amenés à ne pas utiliser l'analyse non standard, contrairement à beaucoup de travaux sur la perturbation singulière. Nous mentionnerons ici le plan de la variable complexe de manière sporadique dans certains commentaires, par exemple dans l'idée de preuve du théorème 4.2 qui est notre résultat principal, mais une méconnaissance complète de l'analyse complexe ne nuit pas du tout à la lecture du reste de l'article.

2 Exemples introductifs.

2.1 Premier exemple.

Commençons par l'équation

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = 2xy + \varepsilon g(x), \tag{2}$$

où $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre et x, y sont des variables réelles. On suppose que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Ces hypothèses sont là pour simplifier la présentation, mais beaucoup des résultats qui suivent sont valables avec des hypothèses plus faibles. Par exemple l'existence de la solution y^- ci-dessous n'utilise que la continuité de g et pour montrer que cette solution a localement un développement asymptotique à l'ordre de N, il suffit que g soit de classe $\mathcal{C}^N$. Avec des modifications mineures, on peut aussi traiter le cas d'un intervalle fini ou de fonctions non bornées.

Puisque l'équation (2) linéaire, ses solutions sont définies sur tout $\mathbb{R}$. La courbe lente mentionnée dans l'introduction est ici $y = 0$; elle est attractive pour $x < 0$ et répulsive pour $x > 0$. L'équation (2) présente un point tournant simple en $x = 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, on peut voir qu'il existe une unique fonction $y^-(\cdot, \varepsilon)$ bornée sur $\mathbb{R}^-$ qui est solution de (2) pour la valeur ε du petit paramètre. Cette solution est donnée par la formule de variation de la constante

$$y^-(x, \varepsilon) = e^{x^2/\varepsilon} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon} g(t) dt. \tag{3}$$

Puisque dans cet article ε est une variable, ce que nous appelons "solution" est en fait une famille de solutions dépendant de ε. La formule (3) définit une famille de solutions de (2) qui sont non seulement bornées sur $\mathbb{R}$ prises isolément, mais de plus bornées uniformément par rapport à ε (ou encore, c'est une fonction des deux variables x et ε qui est bornée sur $\mathbb{R}^- \times]0, \varepsilon_0]$ pour un certain $\varepsilon_0 > 0$). Dans toute la suite, nous utiliserons parfois l'expression "bornée" pour "bornée uniformément par rapport à ε". Dans le contexte de l'analyse non standard, cela correspondrait à une fonction de la seule variable x (puisque ε serait alors une constante i-petite) limitée sur $\mathbb{R}^-$.

Par une succession d'intégrations par parties, on montre aisément que, pour tout $\delta > 0$ fixé, la solution y^- admet aussi un développement asymptotique uniforme sur $]-\infty, -\delta[$ de la forme $\widehat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(x)\varepsilon^n$ au sens de Poincaré : pour tout entier $N > 0$, il existe une constante C_N telle que pour tout $x \in]-\infty, -\delta[$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$

$$\left| y^-(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n(x)\varepsilon^n \right| \leq C_N \varepsilon^N.$$

Ce développement est de fait l'unique solution formelle de (2) ; elle est donnée par les premiers termes

$$y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = -\frac{1}{2x}\, g(x), \tag{4}$$

puis récursivement par

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2x}\, y_n'(x). \tag{5}$$

Pour voir que $\widehat{y}$ est bien un développement asymptotique de y^-, on peut par exemple écrire $y = y^{(N)} + z\varepsilon^N$ avec $y^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \varepsilon^n$ et vérifier que z satisfait une équation du même genre que (2), donc est bornée sur $]-\infty, -\delta[$.

En remplaçant $-\infty$ par $+\infty$, la même formule (3) fournit aussi une unique solution y^+ bornée sur $\mathbb{R}^+$, qui admet un développement asymptotique sur $]\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$. Puisque ce développement est l'unique solution formelle de (2), c'est le même que celui de y^-.

Dans le cas très particulier où g est impaire, alors d'une part on a $y^- = y^+$ et d'autre part les formules (4) et (5) montrent que la solution formelle $\widehat{y}$ reste définie en $x = 0$; il est donc naturel de se demander si le développement commun $\sum_{n\geq 0} y_n(x)\varepsilon^n$, valide pour x loin de 0, reste valide près de 0. Dans cet exemple c'est le cas et on peut le montrer en utilisant $y^{(N)}$ comme précédemment. Pour des équations analogues, par exemple en changeant $2x$ par $4x^3$ dans (2), *c.f.* le paragraphe 2.2.1, ce résultat n'est plus vrai, car les coefficients de la solution formelle admettent des pôles en $x = 0$. L'équation (2) est l'un des exemples les plus simples où la théorie de la surstabilité peut s'appliquer. Nous ne poursuivons pas plus loin la discussion dans cette direction car nous voulons présenter les DAC et non la surstabilité.

Lorsque g n'est pas impaire, le développement de y^+ permet toutefois d'avoir aussi une approximation de y^- sur $]\delta, +\infty[$. En effet, on a $y^-(x,\varepsilon) = y^+(x,\varepsilon) + I(\varepsilon)e^{x^2/\varepsilon}$ avec $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon} g(t)dt$. Si g n'est pas impaire, alors la fonction I est non nulle. Par exemple, si la partie paire de g — donnée par $g^+(x) = \frac{1}{2}\big(g(x) + g(-x)\big)$ — satisfait $g^+(x) \sim Cx^{2N}$ avec $C \neq 0$ et $N \in \mathbb{N}$, alors on obtient $I(\varepsilon) \sim C'\varepsilon^{N+1/2}$. Par conséquent, en un point fixé $x > 0$, $y^-(x,\varepsilon)$ prend une valeur exponentiellement grande : il existe $c, a, \varepsilon_0 > 0$ (qui dépendent de x) tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $|y^-(x,\varepsilon)| \geq c \exp\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

Il est possible de décrire précisément en fonction de N le domaine où y^- reste borné et le domaine où y^- tend vers l'infini, mais nous ne faisons pas une étude exhaustive ici : nous allons décrire $y^-(x,\varepsilon)$ en des points x de l'ordre de $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire lorsque x et ε tendent vers 0 avec $\frac{x}{\eta}$ borné. Tout d'abord, on peut voir qu'en de tels points y^- reste bornée, et même tend vers 0. En effet le changement de variable $x = \eta X$ (avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$) dans (3) donne

$$y^-(\eta X, \varepsilon) = \eta \int_{-\infty}^{X} e^{X^2 - T^2} g(\eta T)dT = \mathcal{O}(\eta). \tag{6}$$

Nous allons voir que y^- admet un développement en puissances de η, mettant en jeu à la fois des fonctions de la variable lente x et de la variable rapide $X = \frac{x}{\eta}$. Ceci peut se voir par intégrations par parties successives. Notons Sg la fonction définie par

$$g(x) = g(0) + xSg(x). \tag{7}$$

Puisque g est $\mathcal{C}^\infty$ et bornée sur $\mathbb{R}$, Sg l'est aussi (et tend même vers 0 à l'infini). Une première intégration par parties donne

$$\begin{aligned} y^-(x,\varepsilon) &= e^{x^2/\varepsilon}\Big(g(0)\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon}dt + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon} Sg(t)tdt\Big) \\ &= g(0)\eta\, U^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) - \tfrac{\varepsilon}{2}\, Sg(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}\, e^{x^2/\varepsilon} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon}(Sg)'(t)dt. \end{aligned}$$

avec $U^-(X) = e^{X^2}\int_{-\infty}^{X} e^{-T^2}\, dT$. En appliquant (6) à $(Sg)'$ au lieu de g, on a ainsi

$$y^-(x,\varepsilon) = g(0)\eta U^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) - \tfrac{\varepsilon}{2} Sg(x) + \mathcal{O}\big(\eta^3\big)$$

En itérant l'intégration par parties, on obtient avec l'opérateur S donné par (7) et l'opérateur $D = \frac{d}{dx}$

$$y^-(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\big(\tfrac{1}{2}DS\big)^n g\Big)(0)\eta^{2n+1} U^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) - \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} S\Big(\big(\tfrac{1}{2}DS\big)^n g\Big)(x)\eta^{2n+2} + \mathcal{O}\big(\eta^{2N+1}\big) \tag{8}$$

Il s'agit d'un exemple de développement combiné, de la forme $\sum_{n\geq 0}\Big(a_n(x)+g_n^-\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n$, avec ici

$$a_0=0,\; a_{2n}=-\tfrac12\,S\Big(\big(\tfrac12 DS\big)^{n-1}g\Big),\; a_{2n+1}=0 \tag{9}$$

et

$$g_n^-=c_nU^- \text{ avec } c_{2n}=0,\; c_{2n+1}=\Big(\big(\tfrac12 DS\big)^{n}g\Big)(0).$$

De plus, la fonction U^- admet un développement asymptotique à l'infini, donné par

$$U^-(X)\sim\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\,1.3...(2n-1)2^{-n-1}X^{-2n-1}=-\frac{1}{2X}+\frac{1}{4X^3}-\frac{3}{8X^5}+...,\quad X\to-\infty.$$

Nous sommes donc bien dans le cadre de la définition 3.1. Notons au passage que les termes a_n et g_n^- sont nuls pour la moitié d'entre eux ; il serait donc possible de réécrire (8) sous forme de séries en puissances de ε, mais cela est très particulier à cet exemple. Dans les applications de la partie 4, nous verrons que, bien souvent, les termes de la partie lente d'un DAC sont nuls sauf pour les puissances qui sont des multiples de p. En revanche les termes de la partie rapide n'ont pas de raison a priori de s'annuler.

Bien sûr, la solution y^+ bornée sur $\mathbb{R}^+$ admet elle aussi un DAC

$$y^+(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\big(\tfrac12 DS\big)^{n}g\Big)(0)\eta^{2n+1}U^+\big(\tfrac{x}{\eta}\big)-\tfrac12\sum_{n=0}^{N-1}S\Big(\big(\tfrac12 DS\big)^{n}g\Big)(x)\eta^{2n+2}+\mathcal{O}\big(\eta^{2N+1}\big)$$

avec $U^+(X)=e^{X^2}\int_\infty^X e^{-T^2}\,dT=-U^-(-X)$. Par ailleurs, dans le cas où g est impaire, on a $(DS)^ng$ impaire pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc la première partie du développement (8) est identiquement nulle. On retrouve ainsi le fait que y^- a un développement asymptotique classique en puissances de $\eta^2=\varepsilon$, avec des coefficients de la variable x uniquement.

2.2 Extensions.

2.2.1. Avant de présenter le deuxième exemple, nous voudrions explorer des généralisations et extensions du premier exemple. La première généralisation concerne la nature purement locale du résultat. Tout d'abord, toute autre solution de (2), de condition initiale $y(x_0,\varepsilon)$ bornée (pour $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$) en un point fixé $x_0<0$, admet un DAC sur $[x_0+\delta,0]$ pour tout $\delta\in]0,|x_0|[$; de plus ce DAC est le même que celui de y^- puisque les deux solutions sont exponentiellement proches l'une de l'autre sur $[x_0+\delta,0]$. Pour les mêmes raisons, le résultat reste valide avec une hypothèse seulement locale sur g : si g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, alors pour tout $x_0\in]-r,0[$, tout $\delta\in]0,|x_0|[$ et toute fonction $c=c(\varepsilon)$ bornée sur $]0,\varepsilon_0]$, la solution de (2) de condition initiale $y(x_0,\varepsilon)=c(\varepsilon)$ admet un DAC de la forme (8) sur $[x_0+\delta,0]$; il en est de même pour les solutions à droite, *i.e.* avec $x_0\in]0,r[$. Ces DAC ne dépendent pas des conditions initiales ; ils sont a priori différents à gauche et à droite mais ils ont la même partie lente $\sum_{n\geq 0}a_n\eta^n$ avec a_n données par (9).

2.2.2. La deuxième généralisation est de remplacer le terme $2x$ dans (2) par $p\,x^{p-1}$, où p est un entier pair. Nous avons toujours une unique solution y^- bornée sur $\mathbb{R}^-$ et une unique solution y^+ bornée sur $\mathbb{R}^+$. Elles sont données à présent par $y^\pm(x,\varepsilon)=e^{x^p/\varepsilon}\displaystyle\int_{\pm\infty}^x e^{-t^p/\varepsilon}g(t)dt$. La condition $y^-=y^+$ est toujours équivalente à g impaire. La recherche d'une solution formelle $\widehat{y}=\sum_{n\geq 0}y_n(x)\varepsilon^n$ aboutit à

$$y_0(x)=0,\quad y_1(x)=-\frac{1}{p\,x^{p-1}}\,g(x),\quad\text{puis}\quad y_{n+1}(x)=\frac{1}{p\,x^{p-1}}\,y_n'(x).$$

En général cette solution formelle n'est pas définie en $x=0$, même lorsque g est impaire. Dans le cas où g est impaire, le développement de y^- est valide aussi bien pour les x positifs que pour les x négatifs, mais ne peut pas être valide au voisinage de 0. Cependant la même méthode d'intégrations par parties successives permet de montrer (que g soit impaire on non) que y^- possède un DAC, mêlant des fonctions de x et de la variable rapide $X=\frac{x}{\eta}$, avec $\eta=\varepsilon^{1/p}$. Les calculs sont plus longs et compliqués sans être plus difficiles ; ils font apparaître $p-1$ “fonctions spéciales”

$$U^-_{k,p}(X)=e^{X^p}\int_{-\infty}^{X}e^{-T^p}T^{k-1}dT,\quad k=1,...,p-1.$$

On obtient finalement un DAC pour y^- de la forme $\sum_{n\geq 0}\Big(a_n(x)+g_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n$ avec $\eta=\varepsilon^{1/p}$ et $g_n=c_{n,1}U^-_{1,p}+\cdots+c_{n,p-1}U^-_{p-1,p}$. De même que précédemment pour U^-, ces fonctions $U^-_{k,p}$ ont aussi un développement asymptotique lorsque X tend vers $-\infty$.

2.2.3. Une troisième extension concerne les équations où la fonction g dépend de ε. Si g a un développement asymptotique en puissances de ε, ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x, alors on peut montrer que les fonctions $y^\pm$ ont encore des DAC dont les fonctions $g_n^\pm$ sont des multiples de $U^\pm$; le facteur est le même pour les deux signes. Précisément ce DAC est donné comme avant par

$$y^\pm(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}A_{N-n,n}(0,\varepsilon)\eta^{2n+1}U^\pm\big(\tfrac{x}{\eta}\big)-\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}B_{N-n,n}(x,\varepsilon)\eta^{2n+2}+\mathcal{O}\big(\eta^{2N+1}\big)\tag{10}$$

où $A_{m,n}:(x,\varepsilon)\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{m}A_{m,n,k}(x)\varepsilon^k$ est le jet d'ordre m par rapport à ε de la fonction $\big(\frac{1}{2}DS\big)^n g$ et $B_{m,n}$ est le jet d'ordre m par rapport à ε de la fonction $S\,\big(\big(\frac{1}{2}DS\big)^n g\big)$.

La seule modification à apporter est la condition $y^-=y^+$, qui est ici

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/\varepsilon}\,g(t,\varepsilon)\,dt=0.$$

Lorsque $y^-=y^+$, on obtient à nouveau que la solution bornée sur $\mathbb{R}$ a un développement classique dans le cas $p=2$ car les facteurs de $U^\pm$ dans (10) s'annulent. Par contre lorsque $p\geq 4$, ce n'est plus forcément le cas.

2.2.4. Notre dernière extension est d'avoir $f(x)$ à la place de $p\,x^{p-1}$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $xf(x)>0$ si $x\neq 0$ et $f(x)\sim ax^{p-1}$, $x\to 0$ avec $a\neq 0$. La solution y^- s'écrit alors $y^-(x,\varepsilon)=e^{F(x)/\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-F(t)/\varepsilon}g(t)dt$ avec $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, si on ajoute l'hypothèse que $\int_{-\infty}^0 e^{-F(t)/\varepsilon}\,dt$ converge pour $\varepsilon>0$ assez petit.

Un difféomorphisme $x=\varphi(\xi)$ local en 0 permet de se ramener à une équation de la forme

$$\varepsilon\frac{dz}{d\xi}=p\,\xi^{p-1}z+\varepsilon h(\xi),$$

ce qui permet d'obtenir pour y^- un DAC de la forme $\sum_{n\geq 0}\Big(a_n(x)+g_n\big(\frac{\varphi^{-1}(x)}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n$.

Notre théorie générale des DAC permet de montrer qu'un tel développement peut aussi se transformer en un DAC de la variable $X=\frac{x}{\eta}$, *i.e.* de la forme $\sum_{n\geq 0}\Big(b_n(x)+h_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n$, *c.f.* proposition 3.2 (b). Remarquons que, pour cette extension, on a besoin d'autres fonctions "rapides" que U^- et U^+.

Alternativement on peut aussi utiliser le point fixe localement en 0. Si on écrit f sous la forme $f(x) = 2x + h(x)$ avec $h(x) = \mathcal{O}(x^2)$ quand $x \to 0$, alors l'équation s'écrit $\varepsilon\frac{dy}{dx} = 2xy + \varepsilon g(x) + h(x)y$ et on obtient

$$y^-(x,\varepsilon) = e^{x^2/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon}\big(g(t) + \tfrac{1}{\varepsilon}h(t)\,y^-(t,\varepsilon)\big)dt.$$

En utilisant, entre autres, les règles pour la multiplication des DAC, on peut montrer par récurrence que $y^-(x,\varepsilon)$ admet un DAC.

2.3 Deuxième exemple.

Considérons à présent une équation déjà considérée sous une forme voisine par Claude Lobry dans son chapitre introductif [18]. Il s'agit de l'équation

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = 2xy + \varepsilon g(x) + \varepsilon\alpha, \tag{11}$$

où $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre, $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre de contrôle, et où la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle et toutes ses dérivées sont bornées. La question est la suivante.

Existe-t-il des valeurs de α pour lesquelles il existe une solution bornée [1] sur tout $\mathbb{R}$?

La réponse est **oui**. Pour le voir, on procède ainsi : étant donné α arbitraire, il existe toujours l'unique solution bornée sur $\mathbb{R}^-$, notée y^- et donnée par

$$y^-(x,\varepsilon) = e^{x^2/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/\varepsilon}\big(\alpha + g(t)\big)dt. \tag{12}$$

En remplaçant $-\infty$ par $+\infty$, la même formule fournit aussi une unique solution y^+ bornée sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit qu'il existe une solution y bornée sur tout $\mathbb{R}$ si et seulement si $y^+ = y^-$, ce qui donne une équation pour le paramètre α, dont la solution est

$$\alpha(\varepsilon) = -\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon}g(t)dt\Big)\Big/\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon}dt\Big). \tag{13}$$

Comme nous avons supposé g de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que α admet un développement asymptotique quand ε tend vers 0. Pour l'étude des solutions $y^\pm$ correspondant à cette valeur de α, on est dans la situation de la deuxième extension (g dépend de ε) et on a $y^- = y^+$ par le choix de α. La solution y admet donc aussi un développement asymptotique, dont les coefficients sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, y compris en $x = 0$.

On calcule directement les premiers termes

$$y_0(x) = 0, \quad \alpha_0 = -g(0), \quad y_1(x) = -\frac{1}{2x}\big(g(x) + \alpha_0\big) \quad . \tag{14}$$

Pour la suite, il suffit de remarquer que les α_n et les $y_n(x)$ sont déterminées uniquement par le fait que y_n n'a pas de pôle en $x = 0$. On les calcule donc récursivement par

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2x}\big(y_n'(x) - \alpha_n\big), \quad \alpha_n = y_n'(0). \tag{15}$$

[1] Rappelons que " bornée " signifie uniformément par rapport à ε dans un intervalle $]0,\varepsilon_0]$. Dans le présent contexte, il se trouve que, pour tout ε fixé, il existe une unique valeur $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ pour laquelle l'équation (11) a une solution $y = y(x,\varepsilon)$ bornée sur $\mathbb{R}$ au sens classique, et que la fonction y ainsi définie est aussi bornée sur $\mathbb{R}\times\,]0,\varepsilon_0]$.

2.4 Troisième exemple.

Remplaçons le terme $2x$ par $4x^3$; autrement dit, considérons l'équation

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = 4x^3y + \varepsilon g(x) + \varepsilon\alpha, \tag{16}$$

Pour tout $a = a(\varepsilon)$, il existe encore une unique solution y^+ bornée sur $\mathbb{R}^+$ et une unique solution y^- bornée sur $\mathbb{R}^-$. Il existe aussi une unique valeur de α pour laquelle ces deux solutions coïncident pour donner une solution y bornée sur $\mathbb{R}$. Cette solution est donnée par

$$y(x,\varepsilon) = e^{x^4/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^4/\varepsilon}\big(\alpha + g(t)\big)dt \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha(\varepsilon) = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^4/\varepsilon}g(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^4/\varepsilon}dt}. \tag{17}$$

A nouveau on peut montrer que $\alpha(\varepsilon)$ admet un développement asymptotique de la forme $\alpha(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varepsilon^{n/2}$. En revanche, la solution y n'a en général pas de développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ dans un voisinage réel de 0. En effet, un tel développement serait une solution formelle $\widehat{y} = \sum_{n\geq 0} y_n\varepsilon^{n/2}$, $\widehat{\alpha} = \sum_{n\geq 0}\alpha_n\varepsilon^{n/2}$ devant vérifier $y_0(x) = 0$, $y_2(x) = -\frac{1}{4x^3}\big(g(x)+\alpha_0\big)$ et $y_{2n+2}(x) = \frac{1}{4x^3}\big(y_{2n}'(x) - \alpha_{2n}\big)$. Dès qu'un coefficient y_{2n} a une dérivée dont le développement de Taylor contient un terme non nul en x ou x^2, le coefficient suivant présente un pôle en $x = 0$, quelque soit le choix de α_{2n}.

Nous allons voir qu'il est cependant possible de donner une approximation de y valide dans tout un voisinage réel de 0, à l'aide de fonctions de $\frac{x}{\eta}$, où $\eta = \varepsilon^{1/4}$. Cette idée était à la base de la thèse de Th. Forget [12].

En effet, isolons les premiers termes du développement de g en écrivant $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + 4x^3h(x)$. La formule à gauche de (17) devient

$$y(x,\varepsilon) = (\alpha(\varepsilon) + g_0)U_0^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) + \eta g_1U_1^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) + \eta^2g_2U_2^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right) + e^{x^4/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^4/\varepsilon}4t^3h(t)dt \tag{18}$$

où on a posé

$$U_j^-(X) = -e^{X^4}\int_{-\infty}^{X} e^{-T^4}T^jdT.$$

Une intégration par parties donne

$$e^{x^4/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^4/\varepsilon}4t^3h(t)dt = \varepsilon h(x) - \varepsilon e^{x^4/\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^4/\varepsilon}h'(t)dt$$

qui est de la même forme que dans la formule (18), ce qui permet de réitérer. De la même manière que dans 2.2.2 on obtient donc à la fin un DAC. Le fait que y^+ soit égal à y^- entraîne qu'il s'agit d'un DAC sur *tout l'axe réel*. Précisément, il existe des fonctions $a_n, g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et des réels g_{nm} tels que $g_n(X) \sim \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm}X^{-m}$ quand $X \to \pm\infty$ et $y^\pm(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1}\big(a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta})\big) + \mathcal{O}(\eta^N)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

3 Les développements combinés.

Si l'on veut généraliser la méthode du paragraphe précédent à des équations non linéaires, cela nécessite d'élargir la famille de fonctions dans lesquelles s'écrivent les solutions. En particulier, il est nécessaire de prendre en compte les produits de fonctions $U_j^\pm U_k^\pm$, les solutions d'équations différentielles $\varepsilon y' = px^{p-1}y + U^{\pm}\big(\frac{x}{\eta}\big)$, ainsi que des produits de fonctions de x et de fonctions de $\frac{x}{\eta}$. Une stratégie est de construire une algèbre contenant les fonctions $x \mapsto x^n$ et $(x,\varepsilon) \mapsto U_j^{\pm}\big(\frac{x}{\eta}\big)$ et stable par les opérateurs $\mathcal{J}^{\pm}$ suivants. Pour chaque signe $+$ et $-$, $J^{\pm}$ associe, à une fonction v à croissance polynomiale (*i.e.* vérifiant $\exists A, C > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |v(x)| \le C\, e^{A|x|}$), l'unique solution à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^{\pm}$ de l'équation $\dfrac{dU}{dX} = 4X^3U + v(X)$ i.e. $\mathcal{J}^{\pm}$ est donné par

$$\mathcal{J}^{\pm}v(X) = e^{X^4}\int_{\pm\infty}^{X} e^{-T^4}v(T)dT.$$

La construction de la plus petite algèbre avec ces propriétés conduit à définir un grand nombre de "fonctions spéciales" (ceci était la stratégie adoptée par Th. Forget dans sa thèse pour l'approximation de solutions canard comme dans 2.4). Une complication additionnelle provient du caractère non unique de l'écriture. Par exemple, le terme x peut être considéré aussi bien comme un terme fonction de x d'ordre 0 en η qu'un terme fonction de $\frac{x}{\eta}$ d'ordre 1 en η, s'il est écrit $\frac{x}{\eta}\eta$.

La stratégie que nous avons adoptée est de considérer d'emblée une algèbre plus grosse. Un avantage de cette stratégie est la simplicité, un inconvénient est de donner moins de renseignements sur les coefficients. Pour simplifier la présentation, dans les parties 3 et 4.1 nous ne considérons des DAC que pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$. A partir de la section 4.2, nous aurons à nouveau besoin de regarder des DAC pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^-$.

3.1 Notations et définition.

On se donne $\eta_0, r > 0$, $\mu \ge 0$ et on note $I = [0, r]$. Notons $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions a de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel des fonctions g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $]\mu, +\infty[$ et ayant un développement asymptotique au sens de Poincaré à l'infini sans terme constant $g(X) \sim \sum_{\nu\ge 1} g_\nu X^{-\nu}$, $X \to +\infty$, *i.e.*

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists C_N > 0 \quad \forall X > 0, \qquad \Big|g(X) - \sum_{1\le\nu\le N-1} g_\nu X^{-\nu}\Big| \le C_N X^{-N}.$$

Pour définir le développement combiné d'une fonction de deux variables x et η, le plus simple et le plus naturel serait de considérer des fonctions définies sur le produit cartésien $]0, r[\times]0, \eta_0[$. Cependant, pour les applications, il sera commode que l'intervalle par rapport à x évite un voisinage de 0 de taille proportionnelle à η. Pour définir l'intervalle en x, nous avons donc ajouté le paramètre $\mu \ge 0$. Dans la partie 3.3 nous considérerons aussi le cas où μ est négatif, mais pour l'instant nous supposons μ positif.

Définition 3.1 . Soit y une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $\eta \in]0, \eta_0[$ et $x \in]\mu\eta, r]$. Nous disons que y *admet un* DAC s'il existe des fonctions $a_n \in \mathcal{C}$ et $g_n \in \mathcal{G}$, telles que

$$y(x,\eta) \sim \sum_{n\ge 0}\Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n, \quad \eta \to 0$$

autrement dit si, pour tout entier N, il existe une constante $K_N > 0$ telle que, pour tout $\eta \in]0, \eta_0]$ et tout $x \in]\mu\eta, r]$

$$\Big|y(x,\eta) - \sum_{n=0}^{N-1}\Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n\Big| \le K_N\eta^N. \tag{19}$$

Les fonctions a_n forment la *partie lente du* DAC, et les g_n la *partie rapide*.

REMARQUES. 1. Le fait que les fonctions g_n tendent vers 0 quand $X \to +\infty$, implique qu'une fonction $y = y(x,\eta)$ ne peut pas avoir deux DAC différents. En effet, on a $\lim_{\eta\to 0} y(x,\eta) = a_0(x)$ pour $x > 0$, donc aussi $a_0(0)$ est déterminé uniquement, $\lim_{\eta\to 0} y(\eta X,\eta) = a_0(0) + g_0(X)$, et ainsi de suite. A priori, pour l'unicité du développement, il suffirait donc de demander aux fonctions g_n de tendre vers 0 à l'infini. Cependant, si l'on veut la stabilité pour la multiplication, nous allons voir qu'il est nécessaire que les fonctions de $\frac{x}{\eta}$ aient un développement asymptotique complet à l'infini.
2. Il est aussi utile d'avoir des DAC définis avec un paramètre $\mu < 0$. Ces DAC seront donc des approxomations sur des intervalles contenant 0 à l'intérieur. Malheureusement, dans le cadre C^∞, on n'a pas unicité de tels développements ; les fonctions a_n ne sont déterminées que pour $x \geq 0$. Dans nos applications, les fonctions a_n, g_n seront réelles analytiques et les valeurs de a_n pour x positifs déterminent la fonction uniquement. Comme ces DAC avec $\mu < 0$ seront, de plus, Gevrey, on en parlera dans le paragraphe suivant.

Multiplication.

Le produit de deux développements combinés se fait en développant le produit terme à terme. Les produits de deux termes lents, *i.e.* de la forme $a(x)b(x)$, ainsi que de deux termes rapides $g\big(\frac{x}{\eta}\big)h\big(\frac{x}{\eta}\big)$, sont les produits de fonctions usuels. Concernant les produits “mixtes” de $a \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{G}$, on commence par traiter séparément les premiers termes des développements de a et g : on écrit $a(x) = a(0) + xb(x)$ et $Xg(X) = g_1 + h(X)$ avec $b \in \mathcal{C}$ et $h \in \mathcal{G}$ (où g_1 est le premier terme du développement asymptotique de g), ce qui donne $a(x)g\big(\frac{x}{\eta}\big) = \big(a_0 + xb(x)\big)\, g\big(\frac{x}{\eta}\big)$ et $x\, g\big(\frac{x}{\eta}\big) = \Big(g_1 + h\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta$. En combinant ces deux formules, on obtient

$$a(x)\, g\big(\tfrac{x}{\eta}\big) = a_0\, g\big(\tfrac{x}{\eta}\big) + g_1\, b(x)\eta + b(x)\, h\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\eta. \tag{20}$$

En itérant, on obtient ainsi tout un développement en puissances de η pour ce produit. Pour écrire une formule explicite de ce produit, on introduit les opérateurs

$$\mathbf{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \ \text{ tel que } \ a(x) = a(0) + x\mathbf{S}a(x)$$

et

$$\mathbf{T} : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \ \text{ tel que } \ g(X) = \frac{g_1}{X} + \frac{\mathbf{T}g(X)}{X}.$$

Sur les développements asymptotiques, ces opérateurs ont pour action de décaler vers la gauche et d'effacer le premier terme : si $a(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, alors $\mathbf{S}a(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1} x^\nu$ et si $g(X) \sim \sum_{\nu\geq 1} g_\nu X^{-\nu}$, alors $\mathbf{T}g(X) \sim \sum_{\nu\geq 1} g_{\nu+1} X^{-\nu}$.

La formule de multiplication d'une fonction de $\mathcal{C}$ par une fonction de $\mathcal{G}$ s'écrit alors (avec la convention $g_0 = 0$)

$$a(x)\, g\big(\tfrac{x}{\eta}\big) \sim \sum_{\nu\geq 0} \Big(a_\nu\, (\mathbf{T}^\nu g)\big(\tfrac{x}{\eta}\big) + g_\nu\, (\mathbf{S}^\nu a)(x)\Big)\, \eta^\nu. \tag{21}$$

REMARQUES . 1. Les développements combinés classiques [29, 3] entrent dans le cadre des nôtres : il s'agit du cas où les fonctions g_n sont à décroissance exponentielle. Rappelons qu'une fonction $g : J =]\mu, +\infty[\to \mathbb{R}$ est à *décroissance exponentielle* s'il existe $C, A > 0$ vérifiant

$$\forall X \in J,\ |g(X)| \leq C \exp(-AX).$$

Une fonction g à décroissance exponentielle satisfait en particulier $g(X) = \mathcal{O}(X^{-N}),\ X \to +\infty$ pour tout entier N, donc est *plate* : elle admet la série nulle pour développement asymptotique. Une fonction $y = y(x,\eta)$, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $\eta \in]0,\eta_0]$ et $x \in]\mu\eta, r]$, a un *développement combiné au sens classique* s'il existe des fonctions $a_0, a_1, \ldots$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-r, r[$ et $g_0, g_1, \ldots$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance exponentielle sur J vérifiant (19).

2. On peut vérifier que, dans le cas des développements combinés classiques, le développement lent d'un produit ne dépend que des développements lents des facteurs, *c.f.* par exemple entre les formules (2.5) et (2.6) de [3]. En revanche, dans le cas des développements combinés du présent article, la formule (20) montre que le produit d'un terme lent avec un terme rapide fait aussi apparaître des termes lents, si bien que tout est imbriqué.

3. Les DAC sont aussi compatibles avec la composition à gauche et à droite avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$, comme l'exprime l'énoncé suivant.

Proposition 3.2 . (a) *Soit $P(x,z,\eta)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie pour $z \in [-r,r]$, $\eta \in]0,\eta_0]$ et $x \in]\mu\eta, x_0]$ telle que tous les coefficients P_n du développement $P(x,z,\eta) \sim \sum_{n\geq 0} P_n(x,\eta) z^n$ admettent un* DAC *$P_n(x,\eta) \sim \widehat{P}_n(x,\eta)$. Soit $y(x,\eta) = \mathcal{O}(\eta)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ admettant un* DAC *$\widehat{y}(x,\eta)$ quand $\eta \to 0$ et $x \in]\mu\eta, x_0]$ sans termes en η^0. On suppose que $y(x,\eta)$ est bornée par r. Alors la fonction $u : (x,\eta) \mapsto P(x, y(x,\eta), \eta)$ admet le* DAC

$$\widehat{\mathbf{Q}}(\widehat{y})(x,\eta) = \sum_{n\geq 0} \widehat{P}_n(x,\eta)\widehat{y}(x,\eta)^n.$$

(b) *Soit $\varphi :]-x_1, x_1[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$ et soit $z = z(u,\eta)$ une fonction ayant un* DAC *$\sum_{n\geq 0} \Big(a_n(u) + g_n\big(\frac{u}{\eta}\big)\Big)\eta^n$ quand $]0,\eta_0] \ni \eta \to 0$ et $u \in]\mu\eta, r]$, avec $a_n \in \mathcal{C}$ et $g_n \in \mathcal{G}$. On suppose que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la dérivée $g_n^{(k)}$ a un développement asymptotique quand $X \to \infty$. Alors il existe $\widetilde{\mu}, \widetilde{r}, \widetilde{\eta}_0 > 0$ tels que la fonction $y : (x,\eta) \mapsto z(\varphi(x), \eta)$ admet un* DAC *quand $]0, \widetilde{\eta}_0] \ni \eta \to 0$ et $x \in]\widetilde{\mu}\eta, \widetilde{r}]$.*

Remarque . Dans le (a), l'hypothèse "y bornée par r" n'est pas essentielle : il suffit de réduire le domaine de u si elle n'est pas satisfaite.

Preuve . (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme finie $\displaystyle\sum_{0\leq n\leq N-1} P_n(x,\eta) y(x,\eta)^n$ admet un DAC (compatibilité avec produit et somme). Il reste à vérifier qu'il existe une constante L telle que le reste est borné par $L\,|\eta|^N$. Ceci est évident d'après les hypothèses.

(b) Il suffit de montrer que $b(\frac{\varphi(x)}{\eta})$ admet un DAC, si $b :]\mu, \infty]$ est dans $\mathcal{G}$ et si toutes les dérivées de b admettent des développements asymptotiques quand $X \to +\infty$.

Il convient d'introduire les fonctions ψ et h définies par $\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{x} = h(x)$ et $\psi(x,t) = x/(1 + txh(x))$. La fonction h se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-x_1, x_1[$, notée encore h par abus de notation, et $\psi(x,0) = x, \psi(x,1) = \varphi(x)$. Le développement de Taylor de $b\big(\frac{\varphi(x)}{\eta}\big) = b\big(\frac{\psi(x,1)}{\eta}\big)$ par rapport à t donne pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$b\Big(\frac{\varphi(x)}{\eta}\Big) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} b\Big(\frac{\psi(x,t)}{\eta}\Big)\ \Big|_{t=0} + \frac{1}{N!}\frac{\partial^N}{\partial t^N} b\Big(\frac{\psi(x,t)}{\eta}\Big)\ \Big|_{t=\tau}$$

avec un certain $\tau \in]0,1[$. En utilisant le fait que $\frac{\partial}{\partial t}[f(\frac{\psi(x,t)}{\eta})] = (\Delta f)\big(\frac{\psi(x,t)}{\eta}\big)\eta h(x)$ avec l'opérateur Δ défini par $(\Delta f)(X) = -X^2 f'(X)$, on obtient

$$b\Big(\frac{\varphi(x)}{\eta}\Big) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\eta^n}{n!}\,(\Delta^n b)\Big(\frac{x}{\eta}\Big)h(x)^n + \frac{\eta^N}{N!}\,(\Delta^N b)\Big(\frac{\psi(x,\tau)}{\eta}\Big)h(x)^N, \tag{22}$$

et on peut vérifier que le dernier terme est $\mathcal{O}(\eta^N)$. La compatibilité des DAC avec l'addition et la multiplication entraîne alors l'existence d'un DAC pour $b\big(\frac{\varphi(x)}{\eta}\big)$. $\square$

4. Une difficulté pour la compatibilité avec l'intégration provient du fait que les fonctions de $\mathcal{G}$ ayant un terme avec $1/X$ dans leur développement asymptotique à l'infini ne possèdent pas de primitive dans $\mathcal{G}$. Lorsque ces termes sont tous nuls, l'intégration ne pose pas de problème. Précisément, considérons un DAC $y(x,\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n(x) + g_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n$ vérifiant l'hypothèse :

toutes les fonctions g_n satisfont $g_n(X) = \mathcal{O}(X^{-2})$ quand $X \to \infty$.

Alors il est facile de montrer que la fonction $(x,\eta) \mapsto \int_r^x y(t,\eta)\,dt$ admet un DAC : on a

$$\int_r^x y(t,\eta)\,dt \sim \widehat{Y}(x,\eta) - \widehat{Y}(r,\eta), \text{ où } \widehat{Y}(x,\eta) = A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n(x) + G_{n-1}\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n \tag{23}$$

avec $A_n(x) = \int_r^x a_n(t)\,dt$ et $G_n(X) = -\int_X^\infty g_n(T)\,dT$. On a $A_n \in \mathcal{A}$ et, d'après l'hypothèse, $G_n \in \mathcal{G}$. Ici on identifie $\widehat{Y}(r,\eta)$ avec la série formelle obtenue en remplaçant $G\big(\frac{r}{\eta}\big)$ par son développement asymptotique quand $\eta \to 0$ (*c.f.* (25)).

Dans le cas général pour un DAC $y(x,\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n(x) + g_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n$, on considère la série formelle $\widehat{R}(\eta) = \sum_{n=0}^\infty g_{n1}\eta^n$ des résidus des $g_n(X)$ et, avec une fonction arbitraire $R(\eta) \sim \widehat{R}(\eta)$, la différence $y(x,\eta) - R(\eta)\eta x(x^2+\eta^2)^{-1}$. Comme cette fonction satisfait la condition précédente, son intégrale admet un DAC. La fonction $x(x^2+\eta^2)^{-1}$ est arbitraire et pourrait être remplacée par $x(x^2+L^2\eta^2)^{-1}$ avec tout autre réel L, ou par une autre fonction sans singularité réelle et ayant un développement asymptotique à l'infini commençant par $\frac{1}{x}$. Dans la partie 5 par exemple, nous utiliserons la fonction $x^{p-1}(x^p+\eta^p)^{-1}$ Ainsi nous obtenons que

$$\begin{aligned} \int_r^x y(t,\eta)\,dt &\sim \widehat{Y}(x,\eta) - \widehat{Y}(r,\eta), \text{ où} \\ \widehat{Y}(x,\eta) &= \tfrac{\eta}{2}\widehat{R}(\eta)\log(x^2+\eta^2) + A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n(x) + H_{n-1}\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n \end{aligned} \tag{24}$$

avec $A_n(x) = \int_r^x a_n(t)\,dt$ et $H_n(X) = -\int_X^\infty \big(g_n(T) - g_{n1}T(T^2+1)^{-1}\big)\,dT$. Ici aussi on identifie $\widehat{Y}(r,\eta)$ avec la série formelle obtenue en développant $\log(r^2+\eta^2)$ et en remplaçant $H_n\big(\frac{r}{\eta}\big)$ par son développement quand η tend vers 0.

5. Dans notre cadre réel, on ne peut pas conclure que la dérivée d'une fonction ayant un DAC admet de nouveau un DAC ; il est bien connu qu'il existe de petites fonctions avec des dérivées non bornées. Par contre, *si* la dérivée d'une fonction ayant un DAC admet elle aussi un DAC, alors la formule (23) implique que le DAC de la dérivée peut être obtenu en dérivant terme à terme le DAC de la fonction. Dans le cadre complexe, il est possible de montrer que la dérivée d'une fonction ayant un DAC admet un DAC dans un domaine légèrement réduit (*c.f.* [17]).

6. On a aussi un énoncé analogue au théorème classique de Borel-Ritt. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{G}$. Alors, il existe une fonction $y(x,\eta)$ définie pour $\eta \in]0,\eta_0]$ et

$x \in]\mu\eta, r]$, telle que $y(x,\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n(x) + g_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n$. Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème de Borel-Ritt pour des développements asymptotiques uniformes classiques deux fois : une fois pour $\sum a_n(x)\eta^n$, une fois pour $\sum g_n(X)\eta^n$.

3.2 Développements combinés et "matching".

Notre notion de développement combiné mélange la notion classique de développement asymptotique au sens de Poincaré et celle de développement dit "intérieur" de la forme $y(\eta X, \eta) \sim \sum h_n(X)\eta^n$. Ces développements intérieurs occupent une place centrale dans la méthode de recollement des développements asymptotiques (méthode des "matched asymptotic expansions" en anglais). Notre approche permet de donner un fondement solide à cette méthode, en montrant que, dans le cas où il existe un développement combiné, la méthode de recollement est applicable. Précisement, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3 . *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{C}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{G}$. On note leurs développements asymptotiques $a_n(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x^m$, $x \to 0$ et $g_n(X) \sim \sum_{m>0} g_{nm}X^{-m}$, $X \to +\infty$. Supposons que*

$$y(x,\eta) \sim \sum_{n\geq 0} \Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n$$

quand η tend vers 0 et $x \in]\mu\eta, r]$ au sens de la définition 3.1.

Alors, pour $x \in]0, r[$ fixé, on a

$$y(x,\eta) \sim \sum_{n\geq 0} c_n(x)\eta^n, \quad \eta \to 0, \tag{25}$$

où $c_n(x) = a_n(x) + \sum_{0\leq l\leq n-1} g_{l,n-l}x^{l-n}$. De plus ce développement est uniforme par rapport à $x \in [\rho, r]$ pour tout $\rho > 0$.

De même, pour $X \in]\mu, +\infty[$ fixé, on a

$$y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n(X)\eta^n, \quad \eta \to 0,$$

où $h_n(X) = \sum_{0\leq l\leq n} a_{n-l,l}X^l + g_n(X)$. Ce développement est uniforme par rapport à X sur toute partie compacte de $]\mu, +\infty[$.

Remarques . 1. On peut montrer que, pour tout $\kappa \in]0, 1[$, le premier développement est uniforme sur $x > \eta^\kappa$, et que le deuxième est uniforme sur $X < \eta^{-\kappa}$, ce qui justifie la méthode de "matched asymptotic expansions" lorsqu'un DAC existe. Cependant, il est souvent préférable d'avoir des approximations uniformes à sa disposition sur tout le domaine d'étude. Ceci est même indispensable si on veut étudier des DAC de type Gevrey.

2. Dans les cas où on peut démontrer indirectement l'existence d'un développement combiné pour une fonction $y(x,\eta)$, mais qu'on ne connaît pas encore les fonctions a_n, g_n, la meilleure

méthode pour les déterminer est d'appliquer la proposition 3.3. Pour x "loin" de 0, on calcule le développement "extérieur" $y(x,\eta) \sim \sum_{n\geq 0} c_n(x)\eta^n$, puis on rejette les termes avec des puissances négatives. On obtient ainsi les $a_n(x)$. Ensuite, on calcule le développement "intérieur" $y(\eta X,\eta) \sim \sum_{n\geq 0} h_n(X)\eta^n$ et on rejette les termes de puissances positives de X, ce qui donne les $g_n(X)$. Dans les situations concrètes, le calcul des développements extérieur et intérieur mène souvent à des équations de récurrence pour leurs coefficients. Ceci permet donc le calcul des a_n et g_n sans avoir à surmonter les complications dues à la multiplication des DAC.

3.3 Développements asymptotiques combinés : étude Gevrey.

Dans la suite de l'article (section 4) nous appliquerons les DAC à des problèmes d'équations différentielles singulièrement perturbées. Nous verrons à cette occasion que la notion de DAC Gevrey joue un rôle clé. Cette notion Gevrey a déjà joué un rôle essentiel dans la théorie classique des séries formelles et des développements asymptotiques dans les applications à la perturbation singulière [6, 4]. Pour la théorie Gevrey, il semble indispensable de se placer dans le cadre analytique complexe. On fixe $\delta > 0$ et on note U le δ-voisinage complexe tubulaire de l'intervalle $I =]-r,r[$: $U = \{x \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{dist}(x,I) < \delta\}$. Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions a analytiques et bornées dans U.

Définition 3.4 . Soit $\eta_0 > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction y définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $\eta \in]0,\eta_0]$ et $x \in]\mu\eta, r]$ *admet un* DAC *Gevrey d'ordre* $\frac{1}{p}$ *et de type* (L_1, L_2) s'il existe une constante $C > 0$ et des fonctions $a_n \in \mathcal{A}$ et $g_n \in \mathcal{G}$ vérifiant :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in U} |a_n(x)| \leq C L_1^n \Gamma\big(\tfrac{n}{p} + 1\big),$$

(ii) pour tout $n, M \in \mathbb{N}$ et tout $X \in U$

$$\left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq C L_1^n L_2^M \Gamma\big(\tfrac{M+n}{p} + 1\big)\, |X|^{-M}\,, \tag{26}$$

(iii) pour tout $N \in \mathbb{N}$, tout $\eta \in]0,\eta_0]$ et tout $x \in]\mu\eta, r]$

$$\left| y(x,\eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\, \eta^n \right| \leq C L_1^N \Gamma(\tfrac{N}{p} + 1)\, |\eta|^N\,. \tag{27}$$

Dans ce cas, nous écrivons $y(x,\eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n\geq 0} \Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\, \eta^n$, $\eta \to 0$, $x \in]\mu\eta, r]$.

On déduit facilement de (26) que $|g_{nm}| \leq C L_1^n L_2^m \Gamma\big(\frac{m+n}{p} + 1\big)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

Les inégalités (26) sont également indispensables pour la compatibilité de la nouvelle notion avec les opérations élémentaires d'addition, d'intégration et de multiplication. Ceci peut se montrer directement à partir de la définition. On a aussi une compatibilité avec la composition à gauche ou à droite par une fonction analytique et avec la dérivation. Concernant la dérivation, il est nécessaire que les fonctions g_n soient analytiques complexes, par exemple dans le secteur $S = \{X \in \mathbb{C}\ ;\ \arg(X) < \delta\}$. Pour la composition, la compatibilité peut se montrer en utilisant un théorème de type Ramis-Sibuya [23, 24, 25] pour les DAC Gevrey. L'applicabilité de ce théorème aussi nécessite que les g_n soient analytiques dans un secteur du plan complexe. Cependant, pour ne pas alourdir les notations, nous ne considérons dans la suite les fonctions g_n que sur la droite réelle. Pour les preuves et une discussion plus approfondie, voir l'article [17].

REMARQUES . 1. Comme on considère des fonctions a_n analytiques, on a l'unicité d'un DAC Gevrey, même si par exemple la limite $\lim_{\eta\to 0} y(x,\eta)$ ne détermine que des valeurs de $a_0(x)$ pour $x > 0$. Ceci permet aussi l'utilisation de μ négatifs dans la définition 3.4.

2. Le théorème 4.2 de la partie 4 dit que les solutions d'équations singulièrement perturbées ont des DAC Gevrey. Bien que pour des raisons de présentation nous n'ayons pas inclus le cas $p = 1$, le résultat est aussi valide dans ce cas. Or, lorsque $p = 1$, le développement extérieur est régulier, donc coïncide avec la partie lente du DAC. D'après la proposition 3.3, cela signifie que les fonctions g_n sont plates. Puisqu'on montre que ces DAC sont de plus Gevrey, nous retrouvons le fait que les termes rapides d'un développement combiné classique sont exponentiellement décroissants. On a en fait un peu mieux : le (ii) dit un peu plus que simplement les g_n exponentiellement décroissants.

3.4 Fonctions plates Gevrey.

Comme pour les développements asymptotiques classiques, les fonctions *plates* ont un rôle important. Ici, on peut définir deux notions de platitude, suivant que l'on demande aux fonctions a_n et g_n d'être identiquement nulles, ou seulement à leurs coefficients a_{nm} et g_{nm}. Une fonction analytique étant déterminée par les coefficients de sa série de Taylor, la situation pour les g_n et pour les a_n n'est pas symétrique.

Définition 3.5 . Avec les notations de la définition 3.4, on dit que la fonction $y(x,\eta)$ est *plate au sens fort*, si toutes les fonctions a_n et g_n de la série formelle correspondante sont identiquement nulles. On dit qu'elle est *plate au sens faible*, si toutes les fonctions a_n sont nulles et tous les coefficients g_{nm} des développements asymptotiques (26) des fonctions g_n s'annulent.

Un des points clés de la théorie classique des développements asymptotiques Gevrey est la relation entre les fonctions plates Gevrey et les fonctions exponentiellement petites.

Proposition 3.6 . *On suppose que y admet un* DAC *Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ au sens de la définition 3.4 et on utilise les notations de cette définition.*
(a) *Si y est plate au sens fort, alors il existe deux constantes $A, C > 0$ telles que*

$$|y(x,\eta)| \le C \exp(-A/|\eta|^p) \text{ pour } \eta \in]0,\eta_0], x \in]\mu\eta, r]. \tag{28}$$

Réciproquement, si une fonction y est définie pour $\eta \in]0,\eta_0]$ et $x \in]\mu\eta, r]$ et satisfait (28), alors y admet un DAC *Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ plat au sens fort.*

(b) *Si y est plate au sens faible, alors il existe deux constantes $B, C > 0$ telles que*

$$|y(x,\eta)| \le C \exp(-B\,|x|^p \,/\, |\eta|^p) \text{ pour } \eta \in]0,\eta_0], x \in]\mu\eta, r].$$

4 DAC de solutions d'équations différentielles d'ordre 1.

4.1 Enoncé du résultat principal.

On considère l'équation

$$\varepsilon y' = f(x)y + \varepsilon P(x,y,\varepsilon) \tag{29}$$

où f est analytique (réelle) au voisinage d'un intervalle $[a,b]$ avec $a < 0 < b$ et vérifie $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$, et où P est analytique au voisinage de $[a,b] \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Soit $p = 1 + \mathrm{val}(f;0)$, où val désigne la valuation. Autrement dit, on a $p \geq 2$ et $f(x) \sim c\,x^{p-1}$ lorsque x tend vers 0 pour un certain $c > 0$.

La condition $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$ entraîne que la courbe lente $y = 0$ est attractive sur $[a, 0[$ et répulsive sur $]0, b]$. Dans cette situation, il est connu que, d'une part les solutions se prolongent sur la partie attractive de la courbe lente et d'autre part les solutions sont exponentiellement proches les unes des autres. On peut résumer ces deux résultats classiques dans l'énoncé suivant, qui est énoncé pour $]0, b]$ seulement ; pour $[a, 0[$ il y a des résultats analogues.

Proposition 4.1 . *1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in]0, b]$ et soit y la solution de (29) de condition initiale $y(x_0, \varepsilon) = c$. Alors y est définie et proche de la courbe lente pour $x \in]0, x_0[$ dans le sens suivant : pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la solution $y = y(x, \varepsilon)$ est définie pour tout $x \in [\delta, x_0]$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et satisfait de plus $|y(x, \varepsilon)| < \delta$ pour tout $x \in [\delta, x_0 - \delta]$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.*

2. Notons F la primitive de f s'annulant en 0. Soit $x_0 \in]0, b]$, soit $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{R}$ et soit y_1, y_2 les solutions de (29) de conditions initiales respectivement $y_1(x_0) = c_1$ et $y_2(x_0) = c_2$. Enfin, soit $x_1 \in [a, x_0]$, positif ou négatif. Si y_1 est définie et proche de la courbe lente pour $x \in]x_1, x_0[$ (au sens précédent) et si $F(x_1) < F(x_0)$, alors y_2 aussi est définie et proche de la courbe lente pour $x \in]x_1, x_0[$ et de plus on a

$$|y_2(x, \varepsilon) - y_1(x, \varepsilon)| = \exp\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}(F(x) - F(x_0) + o(1))\right\}.$$

Le résultat présenté ci-dessous exprime le fait que, non seulement une solution venant de la droite se prolonge sur un intervalle contenant un petit voisinage de 0 de taille proportionnelle à η, mais de plus elle admet un DAC sur cet intervalle.

Théorème 4.2 . *Soit $x_1 \in]0, b[$ et $y_1 \in \mathbb{R}$ arbitraires. Soit $y = y(x, \varepsilon)$ la solution de (29) de condition initiale $y(x_1, \varepsilon) = y_1$.*

Alors il existe $\varepsilon_0, \mu > 0$ tel que y est définie pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $-\mu\eta \leq x \leq x_1$, où $\eta = \varepsilon^{1/p}$.

De plus y possède un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ par rapport à η : il existe des fonctions $a_n \in \mathcal{A}$ et $g_n \in \mathcal{G}$, telles que, pour tout $\delta > 0$,

$$y(x, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 1} \Big(a_n(x) + g_n\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n, \quad \eta \to 0$$

uniformément pour $x \in [-\mu\eta, x_1 - \delta[$.

4.2 Commentaires.

1. Plus précisément, c'est la fonction $(x, \eta) \mapsto y(x, \eta^p)$ qui a un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ uniforme pour $0 < \eta \leq \varepsilon_0^{1/p}$ et $-\mu\eta \leq x \leq x_1 - \delta$. Notons qu'une autre solution $\widetilde{y}$ de condition initiale $\widetilde{y}(x_2, \varepsilon) = y_2$ avec $x_2 \in]0, b[$ et $y_2 \in \mathbb{R}$ a le même DAC que la solution y de l'énoncé. En effet ces deux solutions sont exponentiellement proches l'un de l'autre sur tout intervalle de la forme $]0, c]$ avec $c < \min(x_1, x_2)$.

2. On a un résultat identique pour les solutions venant de la gauche. Précisément, notons $\mathcal{G}^-$ l'espace vectoriel des fonctions g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $]-\infty, -\mu[$ et ayant un développement asymptotique à l'infini sans terme constant. Alors une solution $y = y(x, \varepsilon)$ de (29) de condition initiale $y(x_1, \varepsilon) = y_1$ avec $x_1 \in [a, 0[$ admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ par rapport à η : il existe des fonctions $a_n \in \mathcal{A}$ et $g_n^- \in \mathcal{G}^-$, telles que, pour tout $\delta > 0$,

$$y(x, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 1} \Big(a_n(x) + g_n^-\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n, \quad \eta \to 0$$

uniformément pour $x \in [x_1 + \delta, \mu\eta[$. Les fonction g_n^- sont a priori différentes des fonctions g_n des DAC à droite. Par contre, comme nous allons le voir dans le commentaire 5 ci-dessous, les fonctions a_n sont les mêmes à gauche et à droite. Pour éviter les confusions nous noterons dans la suite les termes rapides des développements à droite par g_n^+ au lieu de g_n.

3. L'hypothèse "P analytique" peut être affaiblie en ce qui concerne la dépendance par rapport à ε : il suffit que P soit analytique et Gevrey d'ordre 1 pour ε dans un petit secteur $S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$. Cet affaiblissement de l'hypothèse peut sembler artificiel dans le cas d'une équation sans paramètre, mais cela permet d'utiliser le résultat dans le cas d'une équation avec paramètre de contrôle α, par exemple lorsque α a été ajusté pour que l'équation présente des canards en un autre point tournant.

4. **A propos de la preuve.** Les détails de la preuve de ce résultat se trouvent dans [17]. Les grandes lignes sont les suivantes. Nous montrons d'abord qu'il existe des solutions pour ε et pour x dans des secteurs formant des recouvrements de l'origine, puis que ces solutions sont exponentiellement proches les unes des autres. Précisément, lorsqu'on change d'un secteur en ε à l'autre, les deux solutions sont sur une même montagne, donc leur différence est exponentiellement petite de la forme $\exp(-\alpha/|\varepsilon|)$. En revanche, lorsqu'on change de secteur en x, les solutions sont définies sur deux montagnes adjacentes et il faut alors descendre dans la vallée les séparant pour qu'elle deviennent exponentiellement proches. Leur différence est donc de la forme $\exp(-\alpha|x^p/\varepsilon|)$. Il se trouve que ces estimations correspondent exactement aux conditions d'application d'un théorème de type Ramis-Sibuya pour les DAC. Nous ne donnons pas plus de détails sur cette preuve, car de fait ce ne sont pas ces détails qui apportent des informations sur les développements.

5. **Pour le calcul** de ce DAC, on utilise la proposition 3.3, comme indiqué à la fin de la partie 3.2 : on commence par déterminer les développements extérieur et intérieur, puis on rejette la partie polaire du développement extérieur pour obtenir le développement lent et la partie polynomiale du développement intérieur pour obtenir le développement rapide.

Détaillons la procédure. Le développement extérieur est donné par la solution formelle $\sum_{n\geq 1} y_n(x)\varepsilon^n$ de (29). Cette solution est à coefficients réguliers en dehors du point tournant 0 ; elle est donnée récursivement par

$$y_0 = 0, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{f}(y_n' - q_n)$$

où q_n est le coefficient (dépendant de $y_1, \ldots, y_n$) du terme d'ordre n en ε du développement de Taylor par rapport à ε de la fonction

$$\widetilde{Q} : (x, \varepsilon) \mapsto \varepsilon Q\big(x, \sum_{1\leq\nu\leq n} y_\nu(x)\varepsilon^\nu, \varepsilon\big).$$

Notons que, vu comme développement en puissances de η, ce développement extérieur comporte de nombreux termes nuls : en comparaison avec le développement (25) de la partie 3.3, on a $c_{np} = y_n$ et $c_k = 0$ si $k \not\equiv 0 \mod p$. Par ailleurs, ces fonctions y_n sont bien entendu les mêmes à gauche et à droite. Puisque les fonctions a_n sont les parties régulières des fonctions c_n, nous avons aussi $a_n = 0$ si $n \not\equiv 0 \mod p$ et ces fonctions a_n sont les mêmes à gauche et à droite.

Pour déterminer le développement intérieur, on pose $x = \eta X, y(x) = Y(X)$ (avec $\eta^p = \varepsilon$) et on aboutit à l'*équation intérieure*

$$\frac{dY}{dX} = c\, X^{p-1} Y + \eta G(X, Y, \eta) \tag{30}$$

avec $G(X,Y,\eta) = X^p f_1(\eta X)Y + Q(\eta X, Y, \eta^p)$, où f_1 est la fonction analytique déterminée par $f(x) = c\,x^{p-1} + x^p f_1(x)$.

On montre qu'il existe une unique solution formelle $\widehat{Y}^+ = \sum_{n\geq 1} Y_n^+(X)\eta^n$ telle que $Y_n^+(X)$ est à croissance polynomiale lorsque $X \to \infty$, *i.e.* satisfait $\forall n\ \exists C, A > 0\ \forall X \in]0,\infty],\ |Y_n^+(X)| \leq C\,|X|^A$. Cette solution formelle est déterminée récursivement par $Y_0 = 0$ et en calculant l'unique solution à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation

$$\frac{dY_n^+}{dX} = c\,X^{p-1}Y_n^+ + G_n^+(X) \tag{31}$$

où G_n^+ est le coefficient (dépendant de $Y_1^+, \ldots, Y_{n-1}^+$) du terme d'ordre $n-1$ en η dans le développement de Taylor de $(X,\eta) \mapsto G\big(X, \sum_{1\leq\nu<n} Y_\nu^+(X)\eta^\nu, \eta\big)$ par rapport à η. On trouve $Y_n^+(X) = \displaystyle\int_\infty^X \exp(X^p - s^p)\,G_n^+(s)ds.$

De même, en changeant $+\infty$ par $-\infty$, on montre qu'il existe une unique solution formelle $\widehat{Y}^- = \sum_{n\geq 1} Y_n^-(X)\eta^n$ avec des solutions Y_n^- à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^-$.

Remarquons que les développements asymptotiques des $Y^\pm(X)$ quand $X \to +\infty$ resp. $X \to -\infty$ sont les mêmes. On peut le voir de deux manières : ils sont déterminés par la même récurrence que les $Y^\pm$ (dans l'algèbre des séries formelles) ou encore ils sont liés aux parties singulières des coefficients y_ν de la solution formelle extérieure.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $Y_n^\pm$ s'écrit $Y_n^\pm = P_n + g_n^\pm$, où P_n est un polynôme qui correspond aux parties régulières des fonctions y_ν. Ce polynôme est le même à gauche et à droite ; par conséquent on a $Y_n^+ - g_n^+ = Y_n^- - g_n^-$. Nous retrouvons aussi le fait que chacun des DAC à gauche et à droite est déterminé de manière unique — en particulier ne dépend pas du choix de la condition initiale — comme nous l'avions écrit au début de cette partie.

6. Dans le cadre complexe, le *relief associé à (29)* est le graphe de la fonction

$$R : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Re} F(x), \quad \text{avec } F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi.$$

Il consiste en une succession de p montagnes $M_k,\ k = 0, ..., p-1$ où $R > 0$ et p vallées V_k où $R < 0$, délimitées par les séparatrices de col $R = 0$. A chaque montagne M_k dans la variable x pour le relief R est associé le "secteur-montagne" $S_k = S\big(\frac{2k\pi}{p} - \frac{\pi}{2p}, \frac{2k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, \infty\big)$ dans la variable X, et on montre qu'il existe une unique solution formelle $\widehat{Y}^k = \sum_{n\geq 1} Y_n^k(X)\eta^n$ telle que $Y_n^k(X) = 0$ est à croissance polynomiale lorsque $X \to \infty$ dans S_k. Cette solution formelle est déterminée récursivement par $Y_0^k = 0$ et en calculant l'unique solution à croissance polynomiale sur S_k de l'équation (31). On trouve $Y_n^k(X) = \displaystyle\int_{\infty e^{2k\pi i/p}}^X \exp(X^p - s^p)\,G_n^k(s)ds$ où G_n^k est le coefficient du terme d'ordre $n-1$ en η dans le développement de Taylor de $(X,\eta) \mapsto G\big(X, \sum_{1\leq\nu<n} Y_\nu^k(X)\eta^\nu, \eta\big)$.

Deux de ces montagnes, l'une à l'ouest, l'autre à l'est, contiennent $[a, 0[$ et $]0, b]$. Dans la situation présente, y se prolonge aux autres vallées ; elle admet aussi un DAC dans ces vallées, qui est le même que celui que nous venons de calculer. En particulier la solution Y_n^+ à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^+$ se prolonge dans tous les "secteurs-vallées" $S\big(\frac{2k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, \frac{2k\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p}, \infty\big)$, $k = 1, ..., p$. Ce ne sera plus le cas dans la généralisation qui suit.

4.3 Généralisation.

Dans beaucoup de situations, une équation singulièrement perturbée ne peut pas se ramener à une équation de la forme (29). En effet, a priori cette mise sous cette forme "quasi-linéaire" ne peut se faire localement qu'en-dehors d'un point tournant. Le résultat qui suit permet de traiter des situations où on ne peut pas mettre l'équation sous forme quasi-linéaire. Des résultats dans cette direction ont été obtenus par Eric Matzinger, notamment dans [19], sur des équations très voisines.

On considère l'équation

$$\varepsilon y' = \big(f(x) + \varepsilon g(x,\varepsilon)\big)y + \varepsilon h(x,\varepsilon) + y^2 P(x,y,\varepsilon) \tag{32}$$

avec, comme précédemment, f analytique dans un voisinage d'un intervalle $[a,b]$ avec $a<0<b$, vérifiant $xf(x)>0$ si $x\neq 0$, et avec g,h analytiques dans un voisinage de $[a,b]\times\{0\}$ et P analytique dans un voisinage de $[a,b]\times\{0\}\times\{0\}$.

Etant donné $r\in\{1,...,p-1\}$, on dira que l'équation (32) *satisfait la condition* (C_r) si, d'une part $h(x,0)=\mathcal{O}(x^{r-1})$, $x\to 0$ et d'autre part le développement $P(x,y,0)=\sum_{k,l\geq 0} p_{k,l}x^k y^l$ satisfait $p_{k,l}=0$ pour tous les k,l tels que $k+rl<p-r-1$. Cette condition a pour conséquence que $P(\eta X,\eta^r Y,\varepsilon)=\mathcal{O}(\eta^{p-r-1})$ pour X,Y fixés.

Théorème 4.3 . *On suppose que (32) satisfait la condition (C_r) pour un certain $r\in\{1,...,p-1\}$. Soit $x_1\in]0,b]$ et $y_1\in\mathbb{R}$ suffisamment petit. Soit $y=y(x,\varepsilon)$ la solution de (32) de condition initiale $y(x_1,\varepsilon)=0$.*

Alors il existe $\varepsilon_0,\mu>0$ tels que y est définie pour $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ et $\mu\eta\leq x\leq b$, avec $\eta=\varepsilon^{1/p}$. De plus y possède un DAC *Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ par rapport à $\eta=\varepsilon^{1/p}$: il existe des fonctions $a_n\in\mathcal{C}$ et $g_n\in\mathcal{G}$, telles que, pour tout $\delta>0$, $y(x,\varepsilon)\sim_{\frac{1}{p}}\sum_{n\geq r}\Big(a_n(x)+g_n\big(\frac{x}{\eta}\big)\Big)\eta^n$ quand $\eta\to 0$ uniformément pour $x\in[\mu\eta,x_1-\delta]$.*

Remarques. 1. La différence principale par rapport au théorème 4.2 est qu'a priori la solution y n'est pas définie dans un voisinage de 0 (de taille proportionnelle à η). La comparaison avec le "matching" (*c.f.* proposition 3.3) montre que les termes lents a_n sont nuls lorsque $n\not\equiv 0 \mod p$. En particulier le coefficient de η^r n'est constitué que d'un terme rapide $g_r\in\mathcal{G}$. De plus, pour $x>0$ fixé on a $y(x,\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon)$, donc ce terme g_r satisfait $g_r(X)\sim\sum_{m=p-r}^{\infty} g_{r,m}X^{-m}$ quand X tend vers $-\infty$.

2. L'exemple ci-dessous montre que la condition (C_r) est nécessaire et naturelle. Il s'agit de l'équation

$$\varepsilon y' = 4x^3 y - \varepsilon - xy^2. \tag{33}$$

On a donc $p=4$, $r=1$ et $p_{1,0}\neq 0$: la condition (C_4) n'est pas satisfaite. On peut montrer facilement que les solutions de (33) proches de la courbe lente 0 ne peuvent pas avoir des DAC. Si elles en avaient, la proposition 3.3 impliquerait que le coefficient de $\varepsilon^n=\eta^{4n}$ dans le développement extérieur admet au maximum un pôle d'ordre $4n$. On constate, par contre, que la solution formelle de (33) présente des pôles d'ordre trop élevé. La recherche d'une solution formelle $\widehat{y}=\sum_{n\geq 1} y_n\varepsilon^n$ conduit à la récurrence

$$y_1(x)=\frac{1}{4x^3},\qquad y_n(x)=\frac{1}{4x^3}\Big(y'_{n-1}(x)+x\sum_{k=1}^{n-1}y_k(x)y_{n-k}(x)\Big).$$

On montre alors par récurrence que y_n est de la forme $y_n(x)=x^{-5n+2}(a_n+xP_n(x))$ où P_n est polynomial et où les nombres a_n satisfont $a_1=1$ et pour $n\geq 2$, $a_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}$ donc sont strictement positifs. Il s'ensuit que y_n a un pôle d'ordre $5n-2$ en $x=0$.

Par ailleurs, on pourrait étudier cette équation en utilisant le changement de variables et inconnues $x=\mu X, y=\mu^2 Y, \varepsilon=\mu^5$, qui conduit à

$$\mu\frac{dY}{dX} = 4X^3Y - 1 - XY^2.$$

Une étude de cette équation singulièrement perturbée (avec des moyens en dehors de notre propos) montrerait que ses solutions restant bornées sur des intervalles $[L, K/\mu]$ avec certains $L, K > 0$ ont des singularités à droite de $X = 0$. Ceci signifie que les solutions correspondantes de l'équation originale (33) admettent des pôles à l'échelle $\mu = \varepsilon^{1/5}$, ce qui est incompatible avec l'existence de DAC.

3. La preuve de theorème 4.3 est basée sur le lemme suivant (ou plutôt sa généralisation dans le champ complexe) :

Lemme 4.4 . *Soit $n \in \{0, 1, .., p-1\}$ et B une fonction bornée par 1. On pose*

$$z_n(x, \varepsilon) = \int_{x_1}^{x} e^{(F(x)-F(u))/\varepsilon} u^n B(u)du.$$

Alors il existe une fonction $\delta : L \mapsto \delta(L)$ tendant vers 0 quand $L \to +\infty$ telle que pour tout $\eta \in]0, \eta_0]$ et tout x dans $[L\eta, x_1[$ on a $|z_n(x, \varepsilon)| \leq \delta(L)|\eta|^{n+1}$.

Dans le cas où la condition initiale est $y(x_1, \varepsilon) = 0$, on réécrit alors (32) en une équation de point fixe par la variation de la constante :

$$y(x, \varepsilon) = \int_{x_1}^{x} e^{(F(x)-F(u))/\varepsilon}\Big(g(u, \varepsilon)y(u, \varepsilon) + h(u, \varepsilon) + \tfrac{1}{\varepsilon}\, y(u, \varepsilon)^2 P(u, y(u, \varepsilon), \varepsilon)\Big)du.$$

Si μ est assez grand, le lemme précédent et les conditions du théorème sur P permettent de montrer que le côté droit définit un opérateur contractant dans l'ensemble des fonctions continues et bornées par η^r quand $\eta \in]0, \eta_0]$ et $x \in [\mu\eta, x_1]$. Comme pour la preuve du théorème 4.2, il faut généraliser ceci dans des secteurs formant des recouvrements de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, puis montrer que les solutions ainsi construites sont exponentiellement proches et appliquer le théorème de type Ramis-Sibuya pour les DAC mentionné dans le paragraphe 4.2.4.

4. Ici encore, on a un résultat identique concernant les solutions venant de la gauche. De même que dans le cas “quasi-linéaire”, les DAC peuvent être calculés à partir du développement formel de (32) et des solutions formelles à droite et à gauche de l'équation intérieure analogue à (30). En particuliers, ils ne dépendent pas du choix des conditions initiales.

4.4 Canard en un point tournant multiple.

On considère l'équation

$$\varepsilon y' = f(x)y + \varepsilon P(x, y, \varepsilon) \tag{34}$$

où f est analytique dans un voisinage complexe d'un intervalle réel $[a, b]$ avec $a < 0 < b$, f réelle sur $\mathbb{R}$, $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$, et P analytique au voisinage de $[a, b] \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^3$, $P(x, y, \varepsilon)$ réel si x, y, ε le sont. On suppose de plus que $x = 0$ est un point tournant *multiple*, *i.e.* $f(x) = c\, x^{p-1}\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$ si $x \to 0$ avec p pair, $p \geq 4$ et $c > 0$.

Un *canard local* est une solution de (34) bornée sur un intervalle ouvert contenant 0 (“bornée” sous-entend uniformément par rapport à ε).

Un *canard global* est une solution de (34) bornée sur tout $[a, b]$.

Dans [16], nous avions établi une équivalence entre l'existence de solutions surstables et l'existence de ce que nous avions appelé *canards-$\mathcal{C}^\infty$*. Ce sont des canards dont toutes les dérivées sont bornées (uniformément par rapport à ε) dans un voisinage de 0. On peut vérifier que ceci correspond exactement à la situation où les fonctions g_n sont identiquement nulles pour tous les n, si bien que le DAC devient un développement asymptotique au sens classique du terme.

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4.2. Une solution y^- de condition initiale $y^-(x,\varepsilon) = y_1$ avec $x_1 \in [a,0[$ admet un DAC Gevrey

$$y^-(x,\eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n\geq 1} \left(a_n(x) + g_n^-\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n.$$

De même, une solution y^+ de condition "initiale" $y^+(x,\varepsilon) = y_2$ avec $x_2 \in]0,b]$ admet un DAC

$$y^+(x,\eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n\geq 0} \left(a_n(x) + g_n^+\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n.$$

De plus les fonctions a_n (qui sont les mêmes à gauche et à droite), g_n^- et g_n^+ ne dépendent pas des conditions initiales.

Supposons à présent qu'il existe un canard local sur un intervalle $[-c,c]$. Alors ce canard admet des DAC à droite et à gauche sur un intervalle $[-c+\delta, c-\delta]$ pour $\delta > 0$ arbitrairement petit. En particulier les fonctions g_n^- et g_n^+ sont de prolongements les unes des autres. Le résultat qui suit montre que cette condition nécessaire $g_n^- \equiv g_n^+$ est aussi une condition suffisante pour l'existence d'un canard local.

Théorème 4.5 . *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(a) *Il existe un canard local.*
(b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n^- \equiv g_n^+$.*
(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n^-(0) = g_n^+(0)$.*

Preuve . L'implication (a)⇒(b) a été présentée avant l'énoncé ; l'implication (b)⇒(c) est évidente. Il suffit donc de démontrer (c)⇒(a). Si (c) est satisfaite, alors les solutions $y^\pm(0,\eta)$ admettent *le même* développement asymptotique quand η tend vers 0. De plus, d'après notre théorie, il s'agit de développements Gevrey d'ordre $1/p$ par rapport à η. La différence $d(\eta) = y^+(0,\eta) - y^-(0,\eta)$ est donc exponentiellement petite, *i.e.* satisfait $|d(\eta)| \leq \exp(-\alpha/\varepsilon)$ avec un certain $\alpha > 0$. Il est bien connu (voir par exemple [6]), que le lemme de Gronwall entraîne que les deux solutions $y^\pm(x,\eta)$ existent et que leur différence $y^+(x,\eta) - y^-(x,\eta)$ reste exponentiellement petite sur un voisinage $]-\delta,\delta[$ indépendent de η. On a donc bien un canard local. □

REMARQUES . 1. Nous insistons sur le fait que le caractère Gevrey des DAC joue un rôle crucial dans cette preuve. C'est pour ce problème et le fait que des développements asymptotiques classiques ne sont plus applicables dans ce contexte qui nous a amenés à développer la théorie des DAC Gevrey.

2. On peut démontrer directement que (c) implique (b) en utilisant le fait que les fonctions $g_n^\pm$ sont données récursivement comme solutions de certaines équations différentielles "intérieures" d'ordre 1 et donc coïncident si elles ont la même valeur en un point. Voir aussi la remarque 5 ci-dessous.

3. Dans [7], Peter De Maesschalck démontre l'équivalence entre l'existence d'un canard local et l'existence d'un canard global. Cette équivalence peut aussi être démontrée comme dans [16]. Puisque ceci ne concerne pas les DAC, nous ne mettons pas de détails.

4. La condition $g_n^- \equiv g_n^+$ peut être exprimée aussi sur les développements formels de solutions

de l'équation intérieure ; ceci permet une autre preuve de l'implication (c)⇒(b). L'équation intérieure pour $x = \eta X$, $y(x) = Y(X)$, $\varepsilon = \eta^p$ est de la forme

$$\frac{dY}{dX} = c\, X^{p-1} Y + \eta G(X, Y, \eta) \tag{35}$$

avec $G(X, Y, \eta) = X^p f_1(\eta X) Y + P(\eta X, Y, \eta^p)$, f_1 donnée par $f(x) = c\, x^{p-1} + x^p f_1(x)$. Chacune des deux solutions Y^+ et Y^- correspondant à y^+ et y^- a un développement en puissances de η de la forme $\sum_{n\geq 1} Y_n^{\pm}(X)\eta^n$ où les $Y_n^{\pm}$ sont donnés récursivement par

$$Y_0^{\pm} = 0,\ Y_n^+(X) = \int_{+\infty}^{X} \exp(X^p - s^p)\, G_n^+(s) ds,\ Y_n^-(X) = \int_{-\infty}^{X} \exp(X^p - s^p)\, G_n^-(s) ds,$$

où $G_n^{\pm}$ est le coefficient (dépendant de $Y_1^{\pm}, \ldots, Y_{n-1}^{\pm}$) du terme d'ordre $n - 1$ en η obtenu en développant $G\big(X, \sum_{1\leq\nu<n} Y_\nu^{\pm}(X)\eta^\nu, \eta\big)$ par Taylor par rapport à η.

Comme nous l'avons vu dans le commentaire 4.2.5, la partie polynomiale de Y_n^+, qui est $Y_n^+ - g_n^+$, correspond aux parties régulières des coefficients y_ν de l'unique solution formelle de (34), donc est égale à $Y_n^- - g_n^-$. Ainsi la condition $g_n^+ = g_n^-$ est équivalent à la condition $Y_n^+ = Y_n^-$.

Par récurrence, si pour $k < n$ on a $Y_k^+ \equiv Y_k^-$, alors on a $G_n^+ \equiv G_n^-$. La condition (c) de l'énoncé implique de plus $Y_n^-(0) = Y_n^+(0)$; les fonctions Y_n^- et Y_n^+ sont solutions d'une même équation d'ordre 1 avec même condition initiale, donc sont égales, ce qui implique (b). Par ailleurs, la condition $Y_n^+ \equiv Y_n^-$ est aussi équivalente à $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^p)\, G_n^+(s) ds = 0$.

5. On peut affiner l'énoncé du théorème 4.5 dans une direction qui rejoint les canards-$\mathcal{C}^\infty$ de la façon suivante. Pour $m \geq 1$, appelons *canard-$\mathcal{C}^m$* une solution de (34) dont toutes les dérivées sont bornées sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ (uniformément par rapport à ε) jusqu'à l'ordre m inclus. Alors nous avons l'énoncé suivant :

> *Il existe un canard-$\mathcal{C}^m$, $m \geq 1$, si et seulement si une des conditions équivalentes de théorème 4.5 est satisfaite et si $g_n^{\pm} \equiv 0$ pour tout $n \leq m - 1$.*

6. Ici nous n'avons parlé que de canards de solutions sans paramètre de contrôle additionnel. L'étude des canards concernant des équations avec paramètre de contrôle est beaucoup plus répandue. Outre l'abondante littérature de l'Ecole non standard française (dont un grand nombre sont dans les références de [9] par exemple) on peut citer [4, 6, 8].

5 Résonance d'Ackerberg-O'Malley, résultats locaux.

On considère l'équation linéaire d'ordre 2

$$\varepsilon z'' - f(x, \varepsilon) z' + g(x, \varepsilon) z = 0 \tag{36}$$

où f et g sont analytiques dans un voisinage de $(0, 0)$. Dans [16], on avait étudié, entre autres, des *solutions C^∞-résonnantes locales* de (36). Ce sont des solutions non triviales $z = z(x, \varepsilon)$ définies pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $-\delta \leq x \leq \delta$ avec certains $\varepsilon_0, \delta > 0$ indépendants de ε, telles que toutes les dérivées $z^{(m)}$ sont bornées sur $]-\delta, \delta[$ (uniformément quand ε tend vers 0). Nous étudierons aussi des *solutions résonnantes locales*, *i.e.* des solutions bornées sur un voisinage de 0 indépendant de ε, mais dont les dérivées ne sont plus nécessairement bornées (uniformément par rapport à ε).

Dans cette partie, on fait l'hypothèse

(H) $\quad f(x,0) = \alpha x^{p-1} + \mathcal{O}(x^p)$ *et* $g(x,0) = \beta x^{p-2} + \mathcal{O}(x^{p-1})$ *avec* p *pair et* $\alpha > 0$.

Le résultat que nous présentons (théorème 5.1) donne des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les solutions formelles de l'équation (36) et de l'équation intérieure associée, pour l'existence de solutions ($\mathcal{C}^\infty$-)résonnantes locales. Il convient donc d'introduire cette équation intérieure ; on l'obtient avec le changement de variables $x = \eta X$, $Z(X) = z(\eta X)$ et $\varepsilon = \eta^p$

$$\frac{d^2Z}{dX^2} - \widetilde{f}(X,\eta)\frac{dZ}{dX} + \widetilde{g}(X,\eta)Z = 0\ , \tag{37}$$

où $\widetilde{f}(X,\eta) = \eta^{1-p} f(\eta X, \eta^p)$ et $\widetilde{g}(\eta X, \eta^p) = \eta^{2-p} g(\eta X, \eta^p)$. L'hypothèse (H) entraîne que

$$\widetilde{f}(X,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(X)\eta^n,\ \widetilde{g}(X,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(X)\eta^n\ ,$$

séries convergentes pour X dans un compact de $\mathbb{R}$ et pour $|\eta|$ assez petit, où p_n, q_n sont des polynômes, dont les premiers sont $p_0(X) = \alpha X^{p-1}$ et $q_0(X) = \beta X^{p-2}$. Avant d'énoncer le résultat, nous décrivons les solutions formelles, dites *extérieures*, resp. *intérieures*, de (36) et (37). Les solutions formelles extérieures de (36) sont de la forme $\widehat{z}(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)\varepsilon^n$; leurs coefficients satisfont la récurrence

$$f(x,0)z_n' - g(x,0)z_n = h_n(x),$$

où $h_0 \equiv 0$ et où $h_n(x)$ est le coefficients de ε^n dans

$$\varepsilon\widehat{z}''(x,\varepsilon) - (f(x,\varepsilon) - f(x,0))\widehat{z}'(x,\varepsilon) + (g(x,\varepsilon) - g(x,0))\widehat{z}(x,\varepsilon).$$

Les fonctions h_n dépendent de f, g, de $z_0, ..., z_{n-1}$ et de leurs dérivées. On voit facilement que ces solutions formelles sont uniques à un facteur "constant" près. Précisément, si $\widehat{z}_0 = \sum_{n\geq 0} z_n(x)\varepsilon^n$ est une solution formelle non triviale de (36), alors les solutions formelles de (36) sont les séries formelles de la forme $\widehat{c}(\varepsilon)\,\widehat{z}_0$ où $\widehat{c}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n$. Par ailleurs, les coefficients z_n peuvent avoir des singularités en $x = 0$, mais sont prolongeables le long de tout chemin restant proche de $x = 0$ et évitant 0.

Les solutions formelles intérieures de (37) sont de la forme $\widehat{Z}(X,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(X)\eta^n$; leurs coefficients satisfont la récurrence

$$\frac{d^2U}{dX^2} - \alpha X^{p-1}\frac{dU}{dX} + \beta X^{p-2}U = H_n(X)\ , \tag{38}$$

où $H_0 \equiv 0$ et $H_n(x)$ est le coefficient de η^n dans

$$\big(\widetilde{f}(x,\eta) - \widetilde{f}(x,0)\big)\frac{d\widehat{Z}}{dX}(X,\eta) - \big(\widetilde{g}(x,\eta) - \widetilde{g}(x,0)\big)\widehat{Z}(X,\eta)\ .$$

Les fonctions H_n dépendent de $\widetilde{f}, \widetilde{g}$, de $U_0, ..., U_{n-1}$ et de leurs dérivées. Ces solutions formelles intérieures ne sont pas uniques, même à un facteur $\widehat{c}(\eta)$ constant près, mais dépendent de deux paramètres $\widehat{c}_1(\eta)$ et $\widehat{c}_2(\eta)$. Par contre, les fonctions U_n sont entières car les coefficients de $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ sont des polynômes et la récurrence est linéaire. Si on demande de plus que les coefficients U_i soient des fonctions à croissance polynomiale quand X tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on obtient des solutions formelles intérieures notées $\widehat{Z}^{\pm}(X,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{\pm}(X)\eta^n$ qui sont uniques à un facteur constant près et joueront un rôle important dans la suite.

Notons que les deux types de solutions formelles peuvent contenir des termes logarithmiques : les solutions formelles extérieures en la singularité $x = 0$, les solutions extérieures dans le comportement asymptotique de leurs coefficients quand $X \to \pm\infty$. Ceci sera source de complications dans la preuve. A présent nous sommes en mesure d'énoncer le résultat.

Théorème 5.1 . (i) *Sous l'hypothèse (H), l'équation différentielle (36) admet des solutions résonnantes locales si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées.*

- *le quotient $D = \beta/\alpha$ est un entier positif congru à 0 ou 1 modulo p et*
- *il existe une solution formelle non triviale $\widehat{Z}(X,\varepsilon) = Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(X)\eta^n$ de (37) dont les coefficients sont à croissance polynomiale à la fois quand $X \to +\infty$ et quand $X \to -\infty$.*

(ii) *Sous l'hypothèse (H), l'équation (36) admet des solutions C^∞-résonnantes locales si et seulement si :*

- *D est un entier positif congru à 0 ou 1 modulo p et*
- *il existe une solution formelle non triviale $\widehat{z}(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)\varepsilon^n$ de (36) dont les coefficients sont analytiques au voisinage de 0.*

Ceci est le cas si et seulement si $\eta^{-D}\widehat{z}(\eta X, \eta^p) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(X)\eta^n$, où Z_n sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n + D$.

Dans les deux parties de l'énoncé, Z_0 est un polynôme de degré D exactement ; c'est le même si on le choisit unitaire.

Remarques . 1. Dans cet article, nous ne décrivons pas le problème original de la résonance exposé dans [1] ni sa relation avec la surstabilité ; nous renvoyons le lecteur à [16] et à la littérature citée là.

2. Dans [16], nous avions démontré la deuxième partie du théorème 5.1, d'une part dans le cas $p = 2$ et d'autre part dans le cas $p > 2$ et $\beta = 0$, *i.e.* $g(x,0) = \mathcal{O}(x^{p-1})$. Dans ce dernier cas, l'équation (36) réduite $f(x,0)z' = g(x,0)z$ n'a pas de point singulier en $x = 0$ et donc $Z_0 \equiv 1$. Par conséquent, le passage à l'équation de Riccati du début de la preuve ci-dessous n'introduit pas de pôle si $\beta = 0$. La deuxième partie du théorème 5.1 était conjecturée dans [16].

3. Des résultats globaux et plus de détails des preuves seront présentés dans un futur article. Voir aussi [7] pour le passage du local au global.

Preuve . La première étape, suivant une idée de Jean-Louis Callot, est de passer à l'équation de Riccati correspondante. Ceci se fait en posant $y = \varepsilon z'/z$ et aboutit à

$$\varepsilon y' = f(x,\varepsilon)y - \varepsilon g(x,\varepsilon) - y^2 \ . \tag{39}$$

D'après notre hypothèse, le théorème 4.3 peut être appliqué avec $r = p - 1$. En tenant compte de la remarque qui suit ce théorème, on obtient que (39) admet deux solutions $y^\pm(x,\eta)$, définies pour $\eta = \varepsilon^{1/p} \in]0, \varepsilon_0^{1/p}]$ et $\pm x \in [L\eta, x_0]$ avec un certain $L > 0$, et que ces solutions admettent des DAC

$$y^\pm(x,\eta) \sim g_{p-1}^\pm\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\eta^{p-1} + \sum_{n=p}^{\infty} \Big(a_n(x) + g_n^\pm\big(\tfrac{x}{\eta}\big)\Big)\,\eta^n \tag{40}$$

quand η tend vers 0, uniformément sur $\pm[L\eta, x_0]$. Ici et dans la suite, nous combinons deux énoncés pour x positifs resp. x négatifs en utilisant le symbole "$\pm$". Remarquons que, d'après (39), les dérivées de $y^\pm$ admettent aussi des DAC, à cause de la compatibilité des DAC avec les opérations élémentaires ; ces DAC des dérivées sont donc obtenus en dérivant terme à terme d'après la remarque 5 à la fin du paragraphe 3.1. Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le commentaire 4.2.5, les fonctions a_n dans (40) sont les mêmes pour y^+ et pour y^-.

En injectant ces DAC dans (39), on obtient que $g_{p-1}^\pm$ est l'unique solution de l'équation de Riccati réduite

$$\frac{dY}{dX} = \alpha X^{p-1}Y - \beta X^{p-2} - Y^2 \tag{41}$$

qui tend vers 0 quand X tend vers $\pm\infty$. On a donc $g_{p-1}^{\pm}(X) = \frac{D}{X} + \mathcal{O}(X^{-2}),\ X \to \pm\infty$ (avec $D = \beta/\alpha$). Nous utiliserons aussi que $g_{p-1}^{\pm}(X) = Z_0^{\pm\prime}(X)/Z_0^{\pm}(X)$ où $Z_0^{\pm}$ est l'unique solution de l'équation linéaire réduite associée à (37)

$$\frac{d^2Z}{dX^2} - \alpha X^{p-1}\frac{dZ}{dX} + \beta X^{p-2} Z = 0 \tag{42}$$

telle que $Z_0^{\pm}(X) \sim (\pm X)^{\beta/\alpha}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{(\pm X)^m}\right)$ quand X tend vers $\pm\infty$. Ceci facilitera le passage du DAC (40) à l'équation linéaire.

Ce passage se fait par $z = \exp(\frac{1}{\varepsilon}\int y)$ et nécessite donc l'intégration d'un DAC. En utilisant les développements $g_n^{\pm}(X) \sim \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm} X^{-m}$ et le fait que g_{nm} est nul lorsque $n + m \not\equiv 0 \mod p$, on obtient d'après la remarque 4 de la partie 3.1

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\varepsilon}\int_{\pm r}^{x} y^{\pm}(\xi,\eta)\,d\xi \quad &\sim \quad \widehat{Y}^{\pm}(x,\eta) - \widehat{Y}^{\pm}(\pm r,\eta) \quad \text{avec} \\
\widehat{Y}^{\pm}(x,\eta) \quad &= \quad \log\left(Z_0^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right) + A_0(x) + \widehat{R}(\varepsilon)\log(x^p+\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(x) + G_n^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right)\eta^n
\end{aligned}$$

où $A_n(x) = \int_0^x a_{n+p}(\xi)\,d\xi$, $G_n^{\pm}(X) = \int_{\pm\infty}^{X}\left(g_{n+p-1}^{\pm}(T) - g_{n+p-1,1}T^{p-1}(T^p+1)^{-1}\right)dT$ et $\widehat{R}(\varepsilon) = \frac{1}{p}\sum_{l=2}^{\infty} g_{lp-1,1}\,\varepsilon^{l-1}$. Comme nous l'avions fait dans la remarque 4 de la partie 3.1, on identifie ici $\widehat{Y}^{\pm}(\pm r,\eta)$ avec la série formelle en puissances de η obtenue en développant $\log(r^p+\varepsilon)$ par la formule de Taylor et en utilisant les développements asymptotiques à l'infini de $\log\left(Z_0^{\pm}(\frac{\pm r}{\eta})\right)$ et de $G_n^{\pm}(\frac{\pm r}{\eta})$.

En utilisant la compatibilité des DAC avec la composition (ici avec l'exponentielle) et en multipliant par une fonction de η seulement ayant l'asymptotique $\exp\left(\widehat{Y}^{\pm}(\pm r,\eta)\right)$ on en déduit l'existence de deux solutions ayant une forme de DAC généralisé (43) ci-dessous. Nous décrivons ces solutions dans un énoncé séparé car il peut être utile pour l'étude d'équations linéaires du deuxième ordre, indépendamment du problème de la résonance.

Proposition 5.2 . *Sous l'hypothèse (H), il existe une série formelle $\widehat{R} = \widehat{R}(\varepsilon)$, des fonctions $B_n \in \mathcal{A}$ et $H_n^{\pm} \in \mathcal{G}^{\pm}$ et deux solutions $z^{\pm}$ de l'équation (36), telles que*

$$z^{\pm}(x,\eta) \sim Z_0^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\exp\left(\widehat{R}(\varepsilon)\log(x^p+\varepsilon)\right)\left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n(x) + H_n^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right)\eta^n\right) \tag{43}$$

quand $\eta \to 0$, uniformément sur $[L\eta, r]$, resp. $[-r, -L\eta]$, où $Z_0^{\pm}(X)$ sont les uniques solutions de (42) avec $Z_0^{\pm}(X) \sim (\pm X)^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $X \to \pm\infty$ et $B_0(0) = 1$.

Remarques . 1. En termes des fonctions A_n et $G_n^{\pm}$ précédentes, les fonctions B_n et $H_n^{\pm}$ sont définies par $B_0(x) = \exp(A_0(x))$ et par

$$B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n(x) + H_n^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right)\eta^n = B_0(x)\,\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(x) + G_n^{\pm}\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\right)\eta^n\right)\ . \tag{44}$$

2. L'unicité des DAC à gauche et à droite pour l'équation de Riccati implique que les développements (43) à gauche et à droite de solutions de (36) sont uniques à une "constante" multiplicative

$\widehat{c}(\eta)$ près.

3. De même que pour les fonctions a_n dans (40) concernant $y^\pm$ et les fonctions A_n pour $\widehat{Y}^\pm$, les fonctions $B_n(x)$ sont les mêmes pour z^+ et z^-. Ceci se voit en comparant les développements de $z^\pm$ avec la solution formelle extérieure (voir partie 3.2).

4. Pour x fixé, $\eta^D Z_0^\pm(\frac{x}{\eta})$ et les deux autres facteurs des développements (43) de $z^\pm$ admettent le même développement asymptotique en puissances de $\eta^p = \varepsilon$ quand $\eta \to 0$. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi $\log(x^p + \varepsilon)$ au lieu de $\log(x^2 + \eta^2)$ comme dans la remarque 4 dans 3.1. Bien sûr, on aurait pu remplacer ce logarithme par un autre logarithme ou toute autre fonction ayant le comportement asymptotique adéquat quand x tend vers $\pm\infty$.

5. Pour décrire le comportement des solutions bornées sur $\pm[L\eta, r]$, il convient de multiplier (43) par η^D ; on obtient alors $\eta^D z^\pm(x,\eta) = x^D B_0(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Par contre, lorsque x et η tendent simultanément vers 0 de telle sorte que x/η reste dans un compact fixé, on a $\eta^D z^\pm(x,\eta) = \mathcal{O}(\eta^D)$.

6. Une comparaison avec les développements présentés dans la suite montre que les produits $Z_0^\pm(X)H_n^\pm(X)$ sont analytiques dans un voisinage de l'axe réel ; puisque $Z_0^\pm$ peut avoir des zéros, cela n'empêche pas que les $H_n^\pm$ puissent avoir des pôles même sur l'axe réel. En revanche, ces produits $Z_0^\pm(X)H_n^\pm(X)$ peuvent avoir d'autres singularités en dehors de l'axe réel. Ceci provient du fait qu'on a mis en facteur une série contenant $\log(X^p+1)$ qui a des points de ramification en les zéros de X^p+1.

7. Comme précédemment, on peut aussi dériver ces développements terme à terme.

Sur des intervalles de la forme $\pm[L,M]$ avec un certain $M > 0$, on a donc $Z^\pm(X,\eta) := z^\pm(\eta X, \eta) = Z_0^\pm(X) + \mathcal{O}(\eta)$. Or $Z_0^\pm$ est solution de (37) qui est régulièrement perturbée et se réduit à (42) quand $\eta = 0$. Le prolongement de $z^\pm$ sur $[-M\eta, M\eta]$ satisfait donc $z^\pm(x,\eta) = Z_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) + \mathcal{O}(\eta)$ d'après le théorème de dépendance analytique d'équations différentielles par rapport aux paramètres. L'existence d'une solution résonnante locale de (36) nécessite donc d'abord que Z_0^+ soit un multiple de Z_0^-. Nous montrerons plus bas le lemme qui suit.

Lemme 5.3 . *La fonction Z_0^+ est un multiple de Z_0^- si et seulement si $D = \beta/\alpha$ est un entier positif congru à 0 ou 1 modulo p. De plus, dans ce cas, $Z_0 := (\pm 1)^D Z_0^\pm$ est un polynôme de degré D.*

La condition sur D est supposée désormais.

Alors (43) entraîne les développements intérieurs suivants pour $\pm X \in [L, M]$

$$z^\pm(\eta X, \eta) e^{-\widehat{R}(\varepsilon)\log\varepsilon} \sim e^{\widehat{R}(\varepsilon)\log(X^p+1)} \left(Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(Z_n(X) + K_n^\pm(X)\big)\eta^n \right) \tag{45}$$

avec des polynômes Z_n de degré au plus $n+D$ et des fonctions $K_n^\pm \in \mathcal{G}$. Précisément, notons P_n la partie polynomiale du produit $Z_0 H_n^\pm$; son degré est au plus $D-1$ puisque $H_n^\pm(X) = \mathcal{O}\big(X^{-1}\big)$ lorsque $X \to \pm\infty$. On a alors $K_n^\pm = Z_0 H_n^\pm - P_n$. Le polynôme Z_n, quant à lui, est obtenu en développant les fonctions $X \mapsto B_k(\eta X)\eta^k$, $k \le n$ par la formule de Taylor et en ne retenant que les termes en η^n, puis en multipliant par Z_0, et enfin en ajoutant P_n. En d'autres termes

$$Z_n(X) = P_n(X) + Z_0(X) \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

En développant l'exponentielle du côté droit de (45), on obtient donc des fonctions $U_n^\pm \in \mathcal{G}^\pm[X, \log(X^p+1)]$ telles que

$$z^\pm(\eta X, \eta) e^{-\widehat{R}(\varepsilon)\log\varepsilon} \sim Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\pm(X)\eta^n \tag{46}$$

quand $\eta \to 0$ uniformément pour $\pm X \in [L, M]$. Or la série formelle dans (46) est solution formelle de (37), donc ses coefficients peuvent être prolongés en des fonction entières. Par construction, la croissance de $U^{\pm}(X)$ quand $X \to \pm\infty$ est polynomiale. Comme (37) est régulièrement perturbée (et linéaire), (46) reste valable pour $X \in [-M, M]$, ainsi que (45). Comme auparavant, on peut dériver (45) et (46) terme à terme par rapport à X.

Supposons d'abord que (36) admette une solution résonnante locale, notée $z(x, \eta)$, définie et bornée quand $-\delta \le x \le \delta$ et $0 < \eta \le \eta_0$. Alors quitte à diminuer δ, la fonction $y : (x, \eta) \mapsto \varepsilon z'(x, \eta)/z(x, \eta)$ est une solution de (39) de conditions initiales en $\pm\delta$ bornées. Elle admet donc des DAC (40) quand $0 < \eta \le \eta_0$ et $\pm x \in [L\eta, \delta]$ avec un certain $L > 0$ et des η_0, δ diminués. A un facteur constant près, les fonctions $\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\pm\delta}^{x} y(\xi)\, d\xi\right\}$ admettent donc les DAC "généralisés" (43) et aussi les développements intérieurs (46). Par construction, ces fonctions sont des multiples de la solution z donnée, donc chacune d'elle est un multiple de l'autre. Le quotient des deux solutions doit donc avoir un développement asymptotique en série de puissances de η, que nous notons $\widehat{c}(\eta)$. Par conséquent la série formelle $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+(X)\eta^n$ doit être égale à $\left(Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^-(X)\eta^n\right)\widehat{c}(\eta)$. Ceci implique que les coefficients des deux séries ont une croissance polynomiale dans les deux directions $+\infty$ et $-\infty$, ce qui montre la nécessité pour la première partie du théorème.

Pour montrer qu'il s'agit d'une condition suffisante, on utilise l'existence des deux solutions satisfaisant (43) et donc aussi (45) et (46) pour $X \in [-M, M]$. L'existence d'une solution formelle de (37) dont les coefficients sont à croissance polynomiale quand X tend vers $+\infty$ et $-\infty$ entraîne que la série formelle $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+(X)\eta^n$ doit être un multiple de $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^-(X)\eta^n$. Or les coefficients lents $B_n(x)$ sont les mêmes dans (43), donc le quotient doit être égal à 1. A ce point, on utilise de nouveau que nos DAC (40) sont Gevrey d'après le théorème 4.3. Les résultats de [17] permettent d'en déduire que les développements (43), (45) et (46) sont eux aussi Gevrey. De plus, ce sont *les mêmes développements* pour z^+ et z^- et en particulier ces deux fonctions ont le même développement asymptotique Gevrey en $x = 0$. La différence de $z^+(0, \eta)$ et de $z^-(0, \eta)$ est donc exponentiellement petite (d'ordre p en η, *i.e.* d'ordre 1 en ε). Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 4.5, ceci implique que z^+ et z^- sont exponentiellement proches sur un intervalle $[-\delta, \delta]$ avec $\delta > 0$ indépendant de η. Les prolongements de ces solutions sur un intervalle indépendant de η contenant 0 dans son intérieur restent donc bornés uniformément en η ; ce sont donc des solutions résonnantes locales.

Supposons maintenant que (36) admette une solution C^∞-résonnante locale. Alors les fonctions z^+ et z^- doivent avoir des dérivées bornées (uniformément par rapport à ε) dans un voisinage de 0 indépendant de ε. Les fonctions $Z^{\pm} : (X, \eta) \mapsto z^{\pm}(\eta X, \eta)$ doivent donc satisfaire $Z^{\pm(m)}(X, \eta) = \mathcal{O}(\eta^m)$ uniformément sur $\pm[L, M]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si l'un des coefficients de $\widehat{R}$ ou l'une des fonctions $K_n^{\pm}$ était non nul, et donc si l'un des $U_n^{\pm}$ n'était pas un polynôme en X, alors en dérivant (46) terme à terme, on obtiendrait que $Z^{\pm(m)}(X, \eta)$ ne pourrait pas être $\mathcal{O}(\eta^m)$ pour m grand. On doit donc avoir $\widehat{R}(\varepsilon) = 0$ et $K_n^{\pm} = 0$ pour tout n. Avec cette information, (43) entraîne un développement pour $z^{\pm}$ de la forme

$$\eta^D z^{\pm}(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\eta^n := \eta^D Z_0\left(\tfrac{x}{\eta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^D P_n\left(\tfrac{x}{\eta}\right)\eta^n \quad ; \tag{47}$$

ici $\eta^D Z_0\left(\frac{x}{\eta}\right)$ et les $\eta^D P_n\left(\frac{x}{\eta}\right)$ sont des polynômes en x et η et $C_0(x) = x^D B_0(x) \not\equiv 0$.

Dans le cas où il existe une solution locale C^∞-résonnante, on a $\eta^D z^{\pm}(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\eta^n$ et, en particulier, le côté droit est une solution formelle non triviale de (36) avec des coefficients analytiques en $x = 0$. Quitte à multiplier cette solution par une série $\widehat{c}(\eta)$, on peut imposer par exemple $C_0(0) = 1, C_1(0) = \cdots = C_{p-1}(0) = 0$, et on vérifie alors que $C_n = 0$ si $n \not\equiv 0 \mod p$; c'est donc une solution formelle en puissances de $\varepsilon = \eta^p$.

Pour voir qu'il s'agit d'une condition suffisante ici aussi, on utilise à nouveau l'existence des deux solutions satisfaisant (43). L'existence d'une solution formelle non triviale de (36) sans singularité en $x = 0$ implique en remplaçant $x = \eta X$, que (37) admet une solution formelle à coefficients polynomiaux en X. Comme les solutions formelles de (37) $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\pm}(X)\eta^n$ avec $U_n^{\pm}(X)$ à croissance polynomiale quand $X \to \pm\infty$ de (37) sont uniques à un facteur constant près, les fonctions $U_n^{\pm}$ sont des polynômes. Une comparaison avec (45) montre que $\widehat{R}(\varepsilon) = 0$ et que $K_n^{\pm} \equiv 0$ pour tout n. En utilisant leur définition (en dessous de (45)), on obtient donc que les fonctions $z^{\pm}$ satisfont (47). Ce développement asymptotique peut être considéré comme un DAC sans partie rapide, et ceci pour $X \in [L\eta, r]$ resp. $X \in [-r, -L\eta]$ avec un certain $L > 0$. On peut étendre la validité à $\pm[0, r]$ comme précédemment en utilisant le fait que $X \mapsto z^{\pm}(X\eta, \eta)$ satisfait une équation régulièrement perturbée sur $\pm[0, L]$. Enfin, on utilise de nouveau que (43) et donc (47) sont Gevrey. Puisque c'est le même développement pour z^+ et z^-, on en déduit comme précédemment que les fonctions $z^{\pm}$ sont des solutions résonnantes locales. En dérivant terme à terme le DAC (47), on peut faire le même raisonnement pour toutes leurs dérivées ; il s'agit donc de solutions C^{∞}-résonnantes locales. □

Remarque. Une preuve de la suffisance pour la deuxième partie comme dans [6] est possible (voir aussi [16]). On montre d'abord le caractère Gevrey de la solution formelle $\widehat{z}$ (à un facteur $\widehat{c}(\varepsilon)$ près) ; ensuite on construit une quasi-solution de (36) et enfin on montre que la solution avec la même condition initiale en 0 est une solution C^{∞}-résonnante locale.

Nous terminons avec la DÉMONSTRATION du lemme 5.3. Supposons que $Z_0^+ = c\, Z_0^-$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Comme p est pair, le changement de variable $X \mapsto -X$ laisse l'équation (42) inchangée. D'après leur définition par l'asymptotique, on a donc $Z_0^+(-X) = Z_0^-(X)$. Par conséquent on a aussi $Z_0^- = c\, Z_0^+$, donc $c = \pm 1$. Dans le cas $c = 1$, la fonction $Z_0 := Z_0^- = Z_0^+$ est paire, donc $Z_0'(0) = 0$. Dans le cas $c = -1$, la fonction $Z_0 := Z_0^- = -Z_0^+$ est impaire, donc $Z_0(0) = 0$, donc $Z_0'(0) \neq 0$. Notons que, d'après la théorie générale des points singuliers irréguliers des équations linéaires d'ordre 2, on a $Z_0(X) = X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ dans le secteur $|\arg(X)| < \frac{3\pi}{2p}$ (correspondant à une montagne et aux deux vallées adjacentes).

L'équation (42) admet d'autres symétries. Posons $\rho = \exp(2\pi i/p)$; le changement de variable $X \mapsto \rho X$ laisse (42) inchangée. La fonction $\widetilde{Z}_0$ définie par $\widetilde{Z}_0(X) = Z_0(\rho X)$ satisfait donc (42) et $\widetilde{Z}_0(X) = \exp(2D\pi i/p)X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $\left|\arg X + \frac{2\pi}{p}\right| < \frac{3\pi}{2p}$.

Dans le cas $c = 1$, les valeurs initiales en $X = 0$ impliquent que $\widetilde{Z}_0 = Z_0$ et donc l'unicité du comportement asymptotique dans l'intersection $\{X \mid \arg X \in [-\frac{3\pi}{2p}, -\frac{\pi}{2p}]\}$ des deux secteurs mentionnés ci-dessus implique que $\exp(2D\pi i/p) = 1$ et D doit être entier et multiple de p. En utilisant $Z_0(\rho^k X) = Z_0(X)$, $k = 0, 1, ..., p-1$, on obtient $Z_0(X) = X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $|X| \to +\infty$ quelque soit $\arg X$. Ceci implique que D est positif et que $Z_0(X)$ est un polynôme de degré D.

Dans le cas $c = -1$, on obtient $\widetilde{Z}_0 = \rho Z_0$ et donc $\exp(2D\pi i/p) = \rho = \exp(2\pi i/p)$. Ceci implique que $D-1$ est un multiple de p ; comme avant on déduit que D est positif et que $Z_0(X)$ est un polynôme de degré D. Ceci démontre la nécessité de la condition du lemme. On démontre facilement que (42) admet une solution polynomiale dans les deux cas, qui est forcément un multiple de $Z_0^{\pm}$; ainsi la condition est suffisante.

Références

[1] R. C. Ackerberg, R. E. O'Malley, Boundary layer Problems Exhibiting Resonance, *Studies in Appl. Math.* 49 no 3 (1970) 277-295

[2] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations,* Springer-Verlag, New York, 2000

[3] E. Benoît, A. El Hamidi, A. Fruchard, On combined asymptotic expansions in singular perturbations *Electron. J. Diff. Eqns.,* 2002, No. 51 (2002) 1-27

[4] E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, G. Wallet, Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* Vol. VII, n° 4 (1998) 627-658

[5] E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, G. Wallet, *Overstability : Toward a global study,* C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 326 (1998) 873-878

[6] M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, R. Schäfke, Y. Sibuya, Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations, *J. Reine Angew. Math.* 518 (2000) 95-129

[7] P. De Maesschalck, Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order, *Commun. Pure Appl. Anal.* 6, 2 (2007) 311-333

[8] P. De Maesschalck, F. Dumortier, Canard solutions at non-generic turning points *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 2291-2334

[9] F. Diener, M. Diener, *Nonstandard analysis in practice*, Universitext, Springer, Berlin, 1995

[10] A. A. Dorodnitsyn, Asymptotic solution of the van der Pol equation, *Priklad. Mat. Mekh.* 11 (1947) 313-328 (en russe)

[11] W. Eckhaus, *Asymptotic analysis of singular perturbations,* Studies in Mathematics and its Applications, 9. North-Holland, 1979

[12] Th. Forget, *Points tournants dégénérés,* Thèse de Doctorat, Université de La Rochelle, 2007

[13] L. E. Fraenkel, On the method of matched asymptotic expansions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 65 (1969) 209-284

[14] A. Fruchard, E. Matzinger, Matching and singularities of canard values, In *Proceedings of "Analyzable functions and Applications",* ICMS, Edinburgh, 17-21 June 2002, O. Costin, M.-D. Kruskal, A. Macintyre Ed. Contemporary Mathematics (2005) 317-335

[15] A. Fruchard, R. Schäfke, Exceptional complex solutions of the forced van der Pol equation, *Funkcialaj Ekvacioj* 42, 2 (1999) 201-223

[16] A. Fruchard, R. Schäfke, Overstability and resonance *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 53, 1 (2003) 227-264

[17] A. Fruchard, R. Schäfke, Développements asymptotiques combinés et perturbation singulière, Manuscrit

[18] C. Lobry, Dynamic Bifurcations, in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math. 1493 (1991) 1-13

[19] E. Matzinger, *Etude d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées au voisinage d'un point tournant,* Thèse, Preprint IRMA 2000/53, Strasbourg, 2000

[20] E. Matzinger, Étude des solutions surstables de l'équation de van der Pol, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 10, 4 (2001) 713-744

[21] E. Matzinger, Asymptotic behaviour of solutions near a turning point : the example of the brusselator equation, *J. Differ. Equations* 220, 2 (2006) 478-510

[22] E. F. Mischenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, New York and London, 1980

[23] J.-P. Ramis, Les séries k-sommables et leurs applications, In *Complex Analysis, Microlocal Calcul and Relativistic Quantum Theory*, Lect. Notes Physics 126 (1980) 178-199

[24] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain, problems of analytic continuation*, AMS, Providence (RI), 1990

[25] Y. Sibuya, A theorem concerning uniform simplification at a transition point and a problem of resonance, *SIAM J. Math. Anal.* 12, 5 (1981) 653-668

[26] L. A. Skinner, Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance, *SIAM J. Appl. Math.* 47, 2 (1987) 225-231

[27] L. A. Skinner, Matched expansion solutions of the first-order turning point problem, *SIAM J. Math. Anal.* 25, 5 (1994) 1402-1411

[28] L. A. Skinner, A class of singularly perturbed singular Volterra integral equations, *Asymptot. Anal.* 22, 2 (2000) 113-127

[29] A. B. Vasil'eva, V. F. Butuzov, Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations, *Izdat. "Nauka"* (en russe) Moscou, 1973

[30] G. Wallet, Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension un, *Ann. Inst. Fourier*, 40, 3 (1990) 557-595

[31] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965

[32] W. Wasow, *Linear Turning Point Theory*, Springer, New York, 1985

Adresses des auteurs :

Augustin Fruchard
Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière, F-68093 Mulhouse cedex, France

Courriel : Augustin.Fruchard@uha.fr

Reinhard Schäfke
Institut de Recherche Mathématique Avancée
U.F.R. de Mathématiques et Informatique
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Courriel : schaefke@math.u-strasbg.fr