



El balance armónico en la ingeniería de control



*Escuela Técnica Superior
de Ingeniería (Sevilla)*

Quinta reunión de la red temática DANCE Calatayud, 3-5 Noviembre 2010



Enrique Ponce, E.T.S. Ingeniería, Universidad de Sevilla

El método de balance armónico

- Herramienta aproximada para detección de órbitas periódicas y análisis de estabilidad.
- La idea es representar la solución periódica con su serie de Fourier y hallar el periodo y un conjunto finito de coeficientes que satisfagan aproximadamente las ecuaciones del sistema.
- Suele citarse como precursores a Krylov y Bogoliuvov (1947), pero aparece ya v.g. en un trabajo de Appleton y Van der Pol (1922).

El balance armónico en ingeniería de control

- En ingeniería es frecuente considerar la serie de Fourier truncada a un solo armónico, y da lugar al método de la función descriptiva en sistemas de control
- Permite detectar bifurcaciones y construir diagramas de bifurcación “al primer armónico”.
- Aunque pueden darse condiciones para que sus predicciones sean rigurosas, es difícil verificar las diferentes hipótesis.

Llibre, J.; Ponce E. *“Global First Harmonic Bifurcation Diagram for Odd Piecewise Linear Control Systems”*. Dynamics and Stability of Systems, Vol. 11, No. 1, 49-88, (1996).

Sistema diferenciales y sistemas de control

Bajo hipótesis adecuadas, un sistema diferencial puede reescribirse como un sistema de control, tras extraer una parte lineal del campo,

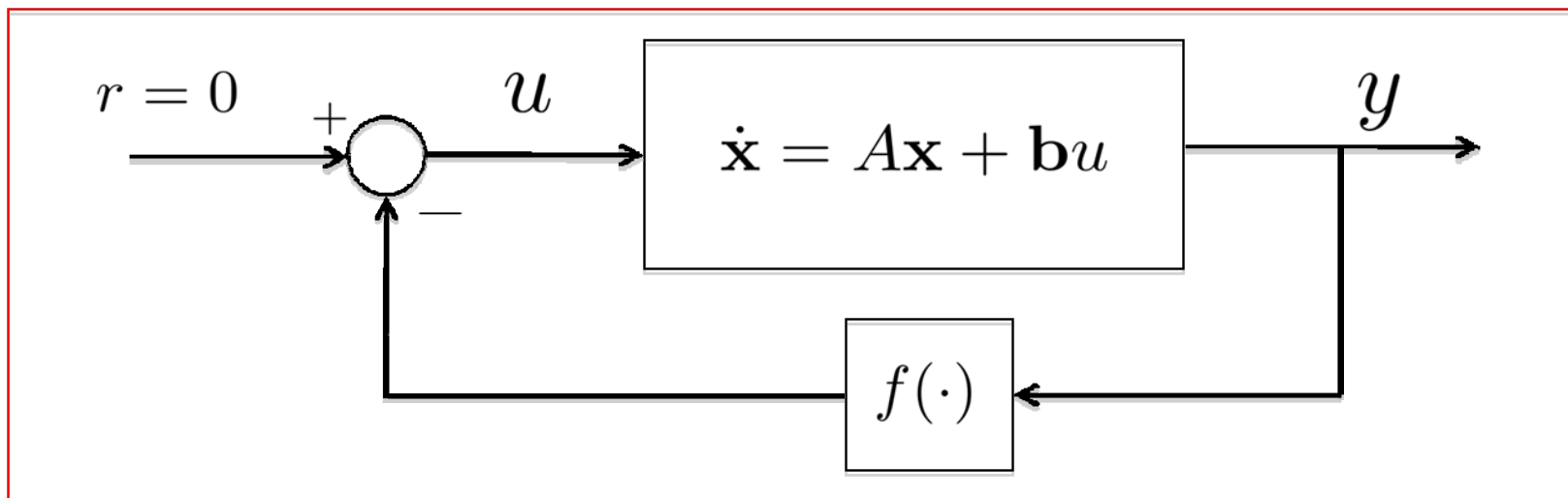
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}f(\mathbf{c}^T \mathbf{x})$$

equivalente al sistema con realimentación negativa siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

(entrada escalar) $u = -f(y),$

(salida escalar) $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$



Representación entrada-salida de un sistema diferencial

Es posible prescindir del vector de estados, y escribir la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \Leftrightarrow (p\mathbf{I} - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}u \quad (p = d/d\tau)$$

Multiplicamos ambos miembros por $\mathbf{c}^T \text{adj}(p\mathbf{I} - A)$ y como

$$\text{adj}(p\mathbf{I} - A)(p\mathbf{I} - A) = \det(p\mathbf{I} - A)\mathbf{I}$$

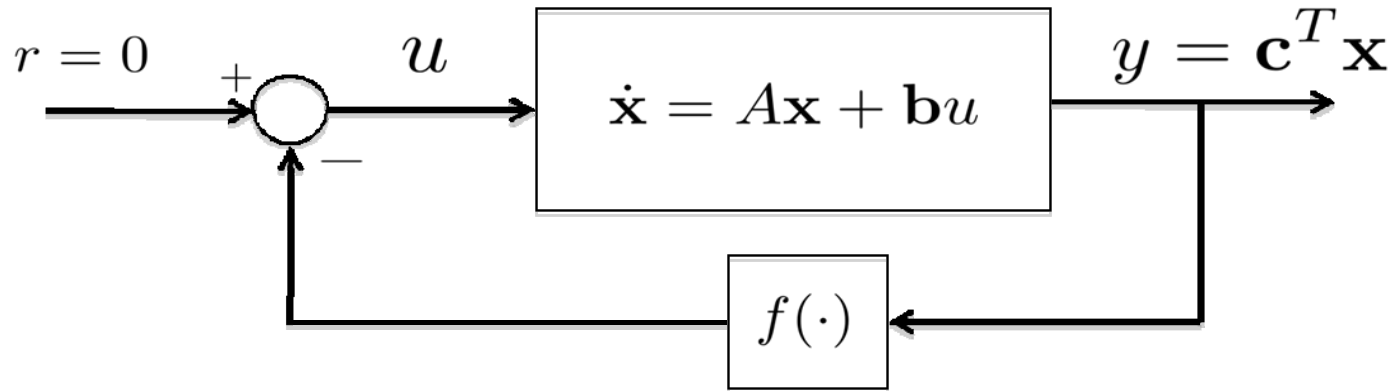
obtenemos

$$\mathbf{c}^T \det(p\mathbf{I} - A)\mathbf{I}\mathbf{x} = \det(p\mathbf{I} - A)\mathbf{I}\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \text{adj}(p\mathbf{I} - A)\mathbf{b}u$$

Es decir, si $n(p) = \mathbf{c}^T \text{adj}(p\mathbf{I} - A)\mathbf{b}$, $d(p) = \det(p\mathbf{I} - A)$,

$$d(p)y(\tau) = n(p)u(\tau)$$

Función de transferencia y sistemas de control



Es usual introducir la fracción racional en el operador diferencial

$$G(p) = \frac{n(p)}{d(p)} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(p\mathbf{I} - A)\mathbf{b}}{\det(p\mathbf{I} - A)} = \mathbf{c}^T (p\mathbf{I} - A)^{-1} \mathbf{b}$$

Pasamos así del sistema original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}f(\mathbf{c}^T \mathbf{x})$ a la formulación entrada-salida mediante la función de transferencia

$$d(p)y(\tau) = n(p)u(\tau) \leftrightarrow y(\tau) = G(p)u(\tau)$$

Y también

$$y(\tau) + G(p)f(y(\tau)) = 0$$

Balance armónico y función descriptiva

Asumimos que $y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega\tau}$ y que $f(y(\tau)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega\tau}$

de manera que usando la ortogonalidad de las exponenciales, llegamos a

$$a_k + G(ik\omega)c_k = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Típicamente se toma sólo un número finito de términos, gracias a la hipótesis de filtrado

$$G(ik\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty.$$

Podemos prescindir de los índices negativos, y tenemos que si $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ entonces

$$c_k = c_k(a) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(y(\tau)) e^{-ik\omega\tau} d\tau$$

Balance armónico y función descriptiva

Resulta muy popular en ingeniería el método de la llamada función descriptiva, sobre todo para funciones no suaves (histéresis y discontinuas incluidas) que básicamente conduce a considerar sólo el primer armónico.

Para fijar ideas asumimos que la función no lineal es impar. Entonces, para las soluciones periódicas que interesan, podemos tomar $a_0 = c_0 = 0$, y que para aproximar la solución basta llegar hasta $k = 1$, es decir

$$a_1 + G(i\omega)c_1 = 0.$$

Esto equivale a hacer las siguientes aproximaciones $y(\tau) \approx a \operatorname{sen}\omega\tau$

$$a_1 = a/(2i), \quad c_1 = N(a)a/(2i), \quad f(y(\tau)) \approx N(a)a \operatorname{sen}\omega\tau$$

donde el factor de atenuación del primer armónico es la **función descriptiva**

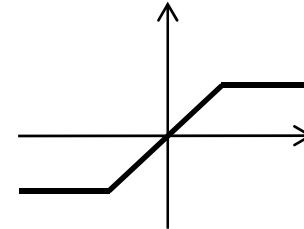
$$N(a) = \frac{\omega}{\pi a} \int_0^{\pi/\omega} f(a \operatorname{sen}\omega\tau) \operatorname{sen}\omega\tau \, d\tau = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} f(a \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

La ecuación que determina la solución periódica es

$$1 + G(i\omega)N(a) = 0$$

Caso frecuente: la saturación normalizada

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{if } |x| \leq 1 \\ \text{sgn}(x), & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$

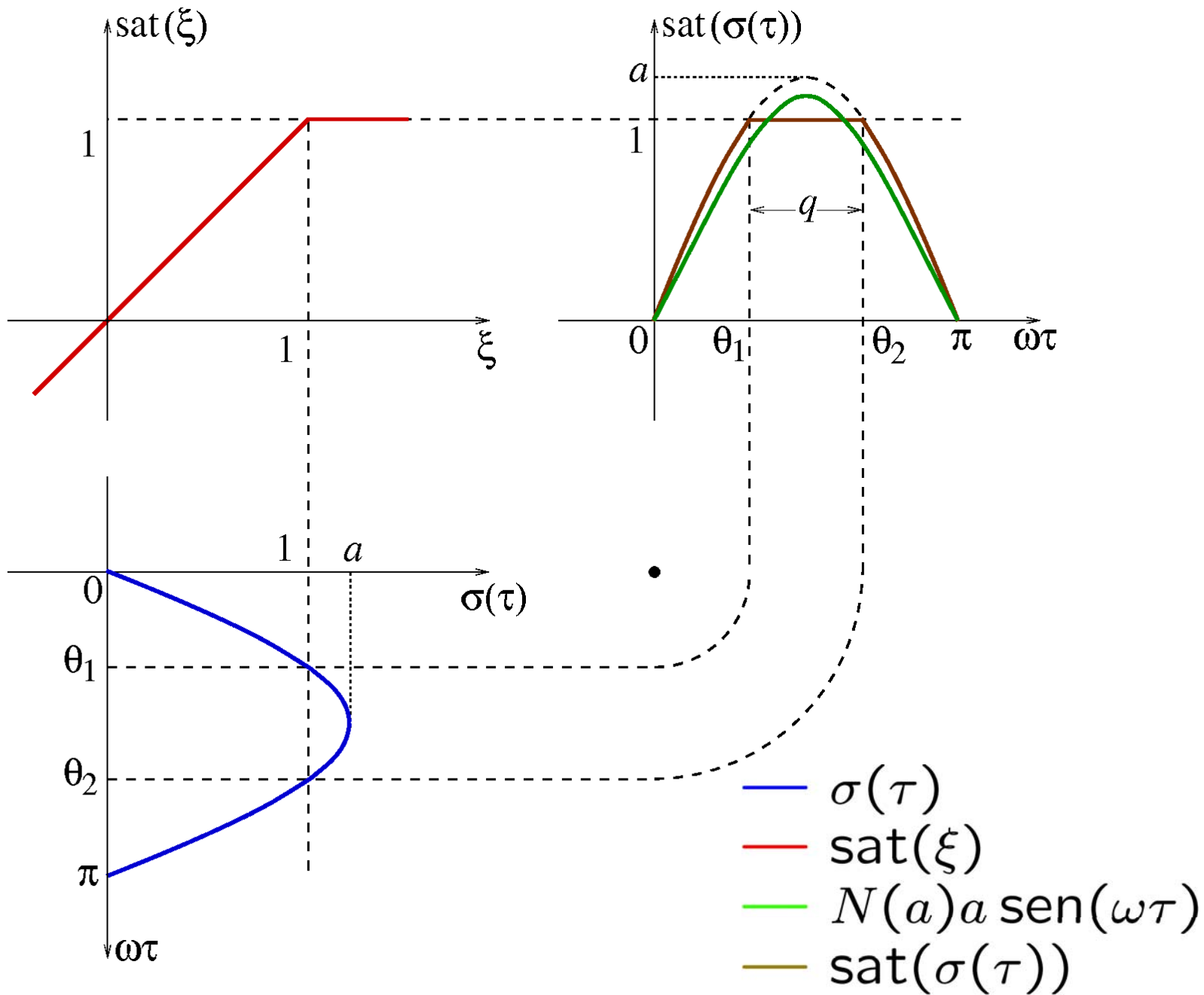


Si suponemos que $y(\tau) = a \text{sen}(\omega\tau)$, entonces se admite que

$$\text{sat}(y(\tau)) \approx N(a)a \text{sen}(\omega\tau),$$

donde la función descriptiva $N(a) = 1$ si $0 < a \leq 1$, y si $a > 1$

$$N(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \text{sat}(a \text{sen}\theta) \text{sen}\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\arcsen\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right).$$

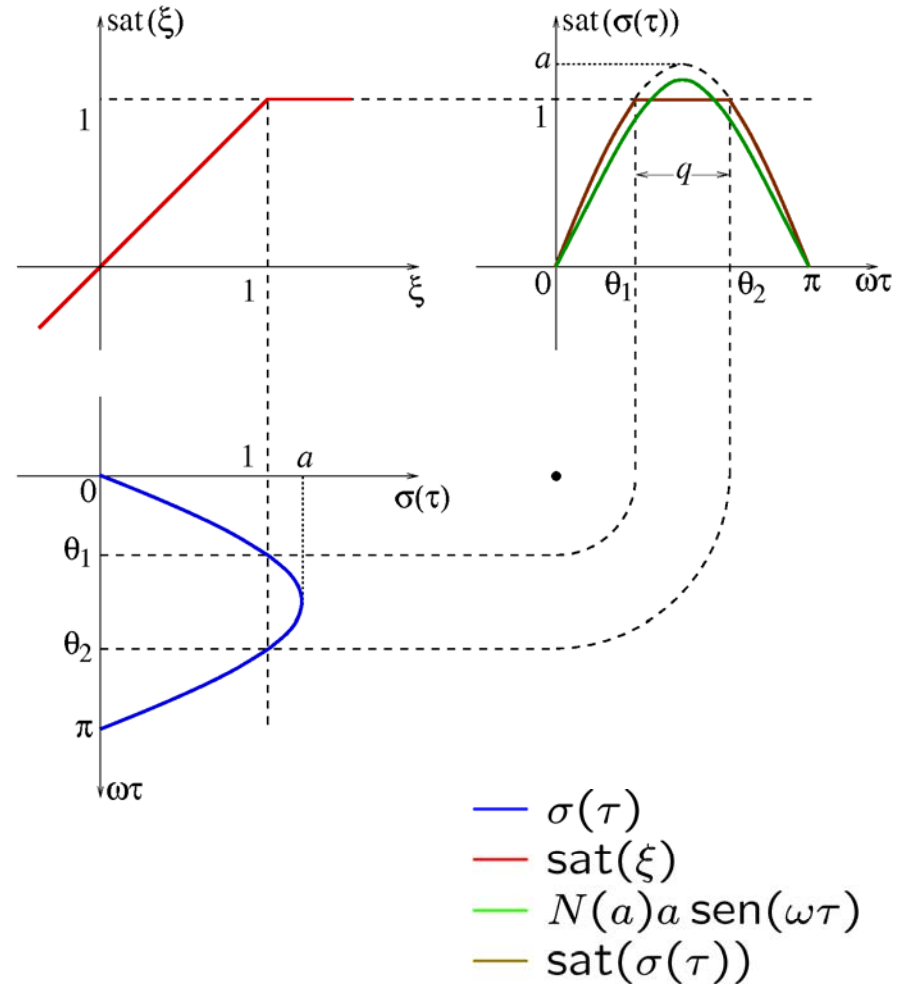


Ecuación de balance del primer armónico

$$1 + G(i\omega)N(a) = 0$$

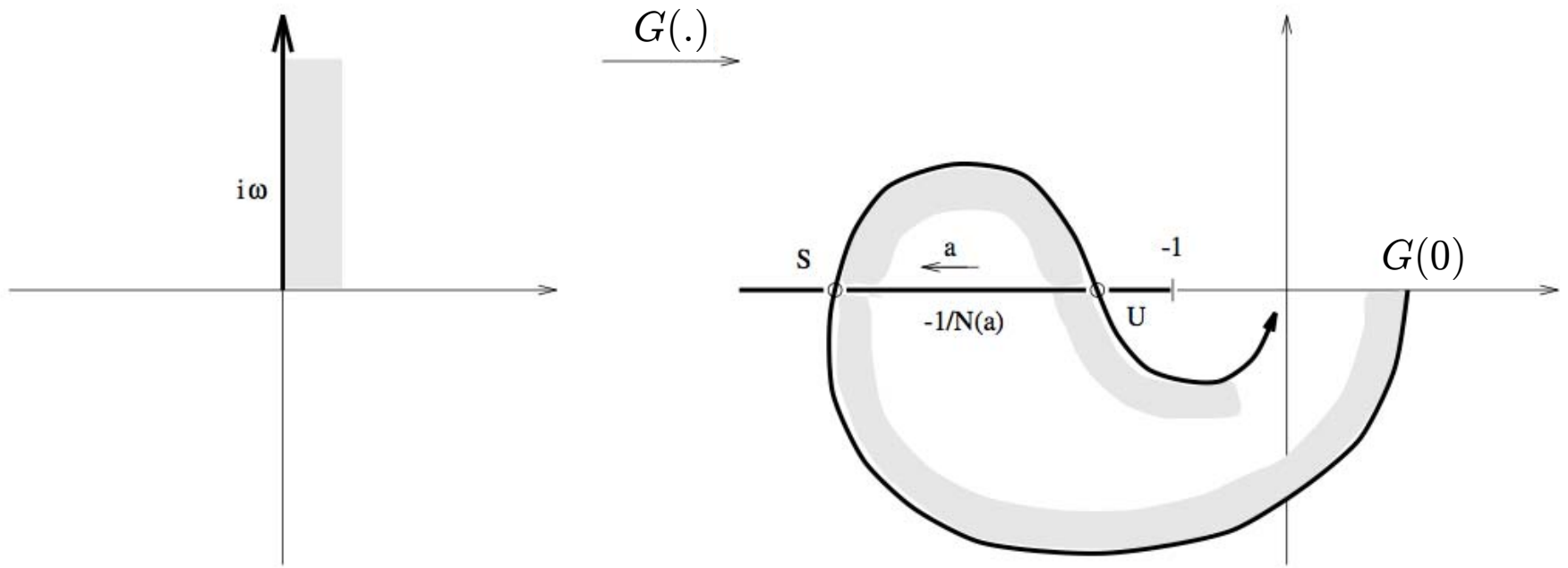
Nueva variable Si para $a \geq 1$, se define $q = \theta_2 - \theta_1$, de forma que $0 \leq q < \pi$ y $a \cos(q/2) = 1$, entonces

$$N(q) = 1 - \frac{q}{\pi} + \frac{\text{sen } q}{\pi}$$

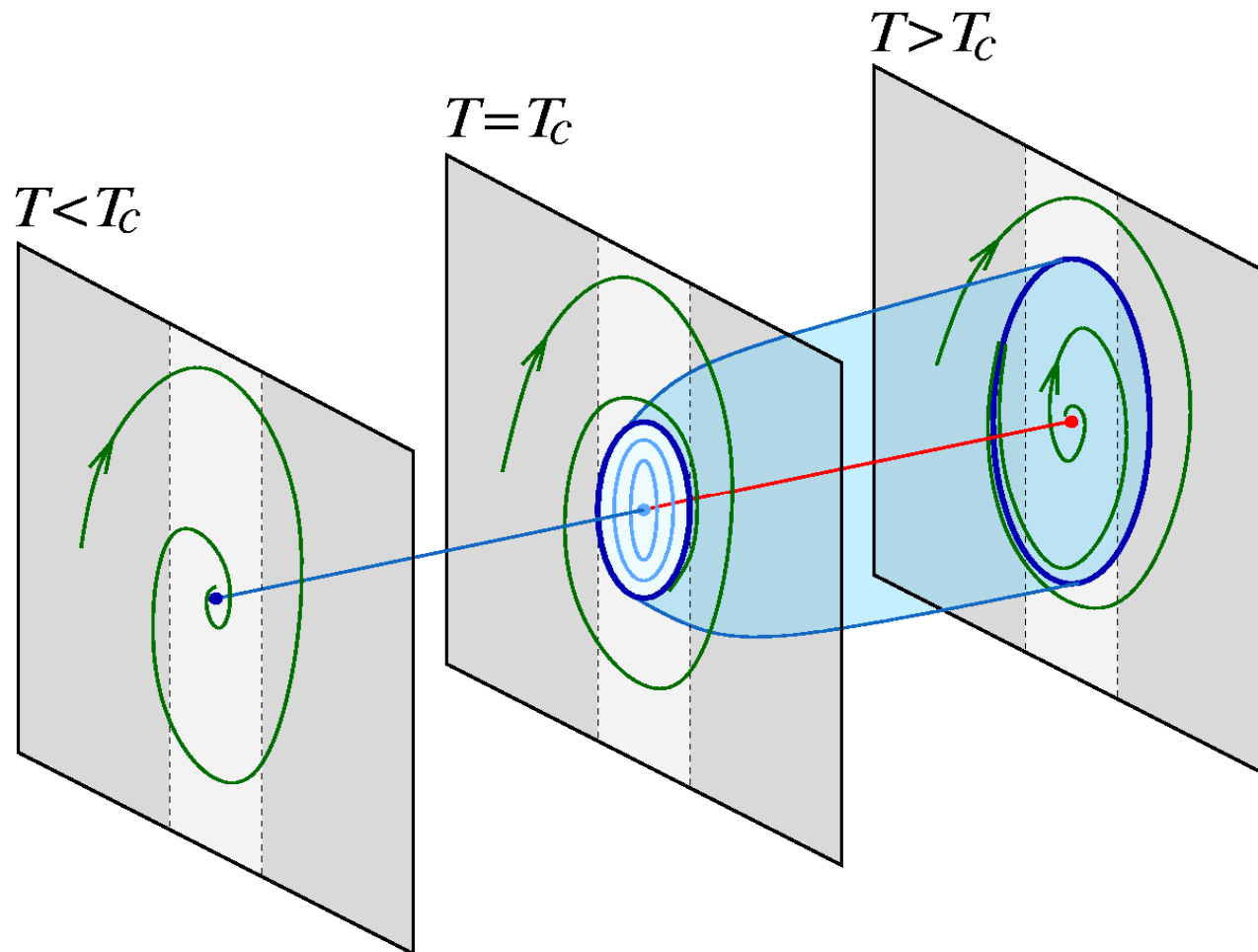


Balance armónico y función descriptiva

La popularidad proviene de que la ecuación $1 + G(i\omega)N(a) = 0$ puede interpretarse como una generalización del criterio de Nyquist para sistemas lineales, que admite además solución en términos de intersección de gráficas.



Bifurcación plana foco-centro-ciclo límite



- Analogía con bifurcación de Hopf del caso diferenciable:
Una pareja de autovalores complejos cruzan el eje imaginario

Bifurcación plana foco-centro-ciclo límite (FPR99)

El sistema de Liénard

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} T - t \\ D - d \end{bmatrix} \text{sat}(x).$$

con $\mathbf{x} = (x, y)$, $D > 0$, $T^2 < 4D$ y $t \neq 0$, experimenta para $T = 0$ una bifurcación F-C-CL. El ciclo límite existe para $Tt < 0$ y T suf. pequeño, y es estable si $t < 0$.

La amplitud a , el periodo P y el logaritmo del multiplicador característico ρ son funciones analíticas en la variable $T^{1/3}$.

$$a = 1 + \frac{(6\pi)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}}}{8t^{\frac{2}{3}}} + \frac{(6\pi^4)^{\frac{1}{3}} (120D - 2t^2 - 21d)}{960Dt^{\frac{4}{3}}} T^{\frac{4}{3}} + O(T^{\frac{5}{3}}),$$

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} + \frac{\pi(d - D)}{D^{\frac{3}{2}}t} T - \frac{(6^2\pi^5)^{\frac{1}{3}} ((d - D)^2 + t^2D)}{10D^{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{3}}} T^{\frac{5}{3}} + O(T^2),$$

$$\rho = -2(6\pi)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{15} (12d + 15 - t^2) T + O(T^{\frac{4}{3}}).$$

Freire E.; Ponce E.; Ros J. "Limit Cycle Bifurcation from Center in Symmetric Piecewise-Linear Systems". International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 9, No. 5, 895-907 (1999).

Predicciones de balance armónico

La ecuación de balance del primer armónico queda

$$1 + \frac{D - d - (T - t)i\omega}{d - \omega^2 - it\omega} N(q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d - \omega^2 + (D - d)N(q) = 0, \\ \omega [t + (T - t)N(q)] = 0. \end{cases}$$

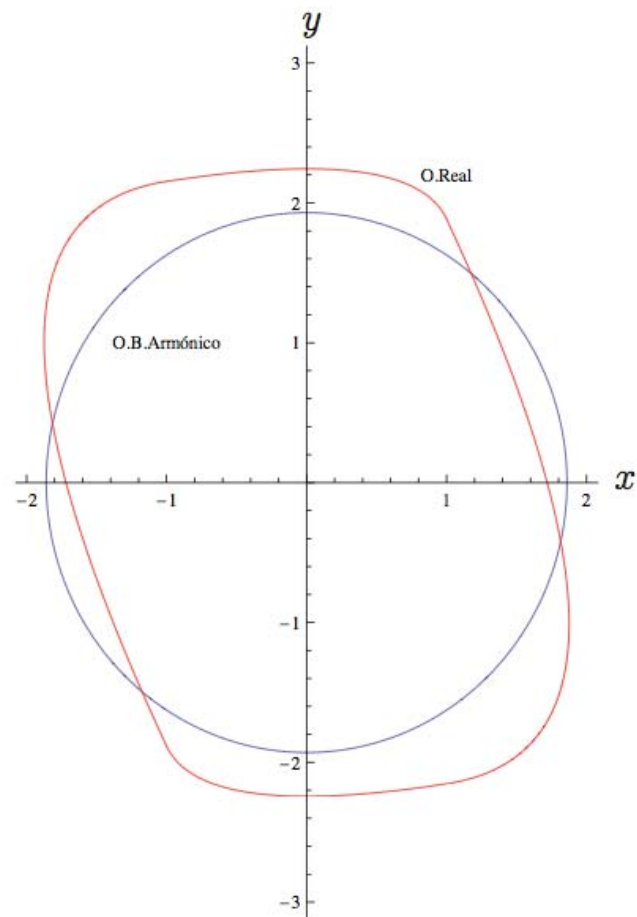
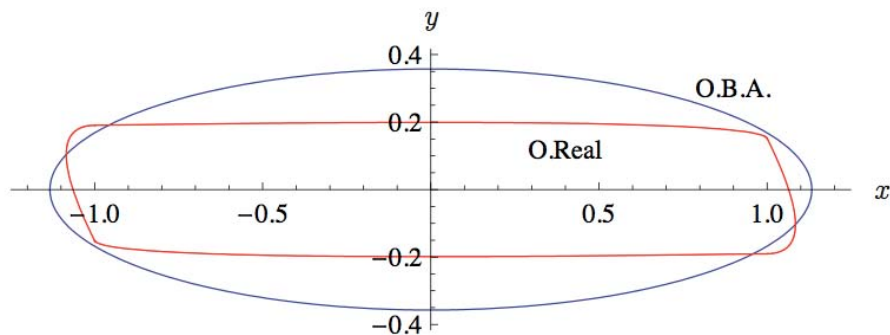
Tras operar y desarrollar en serie obtenemos las aproximaciones

$$a = \underbrace{1 + \frac{(6\pi)^{2/3}}{8} \left(\frac{T}{t}\right)^{2/3}}_{\text{correctos}} + \frac{11(6\pi)^{4/3}}{640} \left(\frac{T}{t}\right)^{4/3} + O\left(\frac{T}{t}\right)^{5/3},$$

$$\hat{P} = \overbrace{\frac{2\pi}{\sqrt{D}} + \frac{\pi(d - D)T}{D^{3/2}t}} + \frac{\pi(d - D)(3d + D)T^2}{4D^{5/2}t^2} + O(T^3).$$

Un sistema con ciclo límite determinable algebraicamente

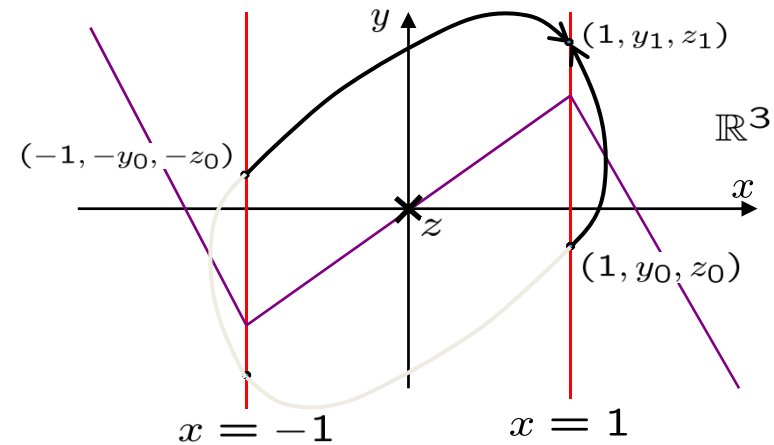
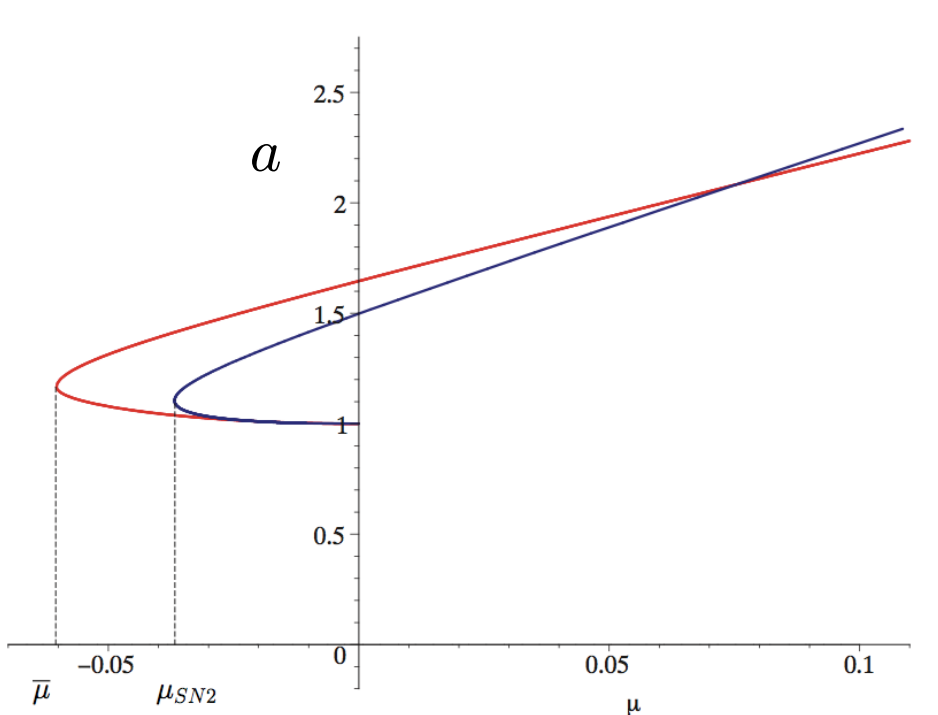
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(\alpha + 1) \\ 2(\alpha^2 - 1) \end{pmatrix} \text{sat}(x).$$



El caso análogo en 3D de ciclos límite alg. computables

El sistema resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 11 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6(1 + \mu) \\ 11(\mu^2 - 1) \\ 6(1 + \mu^3) \end{pmatrix} \text{sat}(x)$$



Comentarios finales

- Para no-linealidades suaves, con o sin simetría, es posible construir algoritmos con un adecuado número de armónicos y predecir bifurcaciones con precisión (Mees, Moiola & Chen, Genesio & Tesi, Gilli...)
- Hacen falta resultados rigurosos que no requieran más esfuerzo que el necesario para aplicar el método.
- El método da mucha información acerca de lo que “es previsible esperar” en un sistema dado y se usa sin las debidas cautelas: lo prueba el que siguen apareciendo trabajos (v.g. Engelberg, 2002) que alertan de sus limitaciones.