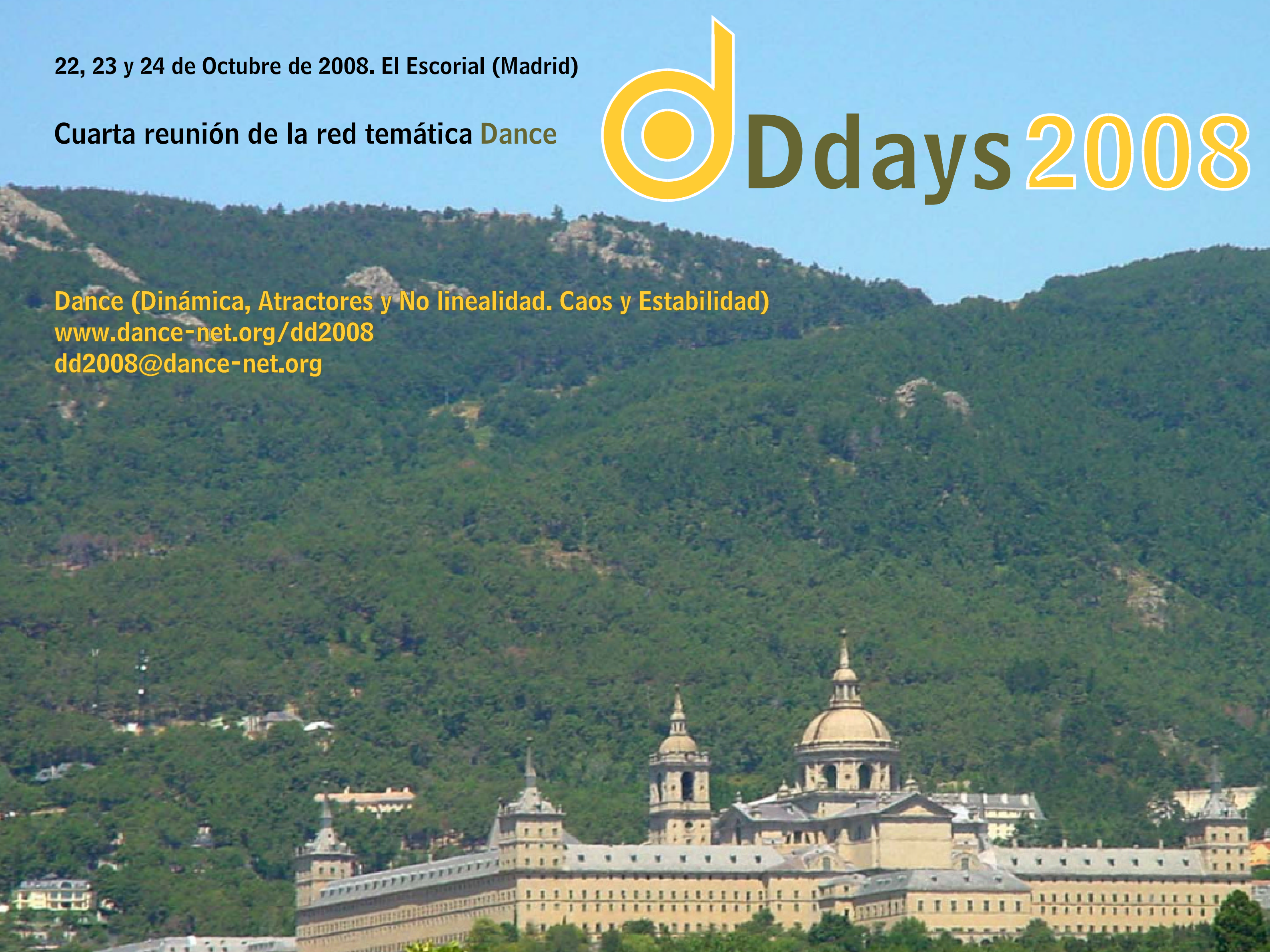
22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)
www.dance-net.org/dd2008
dd2008@dance-net.org



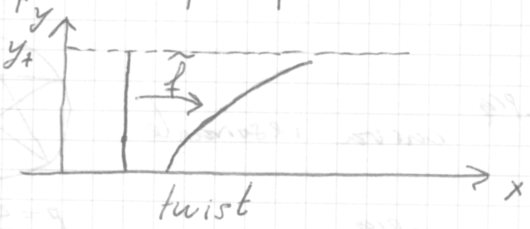
Rotura de "toros" completamente resonantes

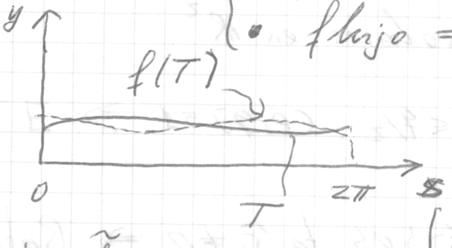
Biblio: Phys D **214**: 78-87 (2006)

1 Twist maps exactos

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \text{ ángulo} \\ Y = (y_-, y_+) \subset \mathbb{R} \text{ "radio"}\end{array}\right\} \Rightarrow C = \mathbb{T} \times Y \quad y \quad \tilde{C} = \mathbb{R} \times Y$$

Def: Un difeo $f: C \circlearrowleft$ es twist exacto si $\left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ Es a.p.} \\ \bullet\ \tilde{f}(x,y) = (x', y') \Rightarrow \frac{\partial x'}{\partial y} > 0 \text{ (twist)} \\ \bullet \text{ flujo = cero}\end{array}\right.$





$\Rightarrow \exists$ Lagrangiano $h: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $\tilde{f}(x,y) = (x', y') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\partial_1 h(x,x') \\ y' = \partial_2 h(x,x')\end{array}\right.$

Def: $(x,y) \in \tilde{C}$ es $\frac{p}{q}$-periódico si $\tilde{f}^q(x,y) = (x + 2\pi p, y)$

2 El caso integrable

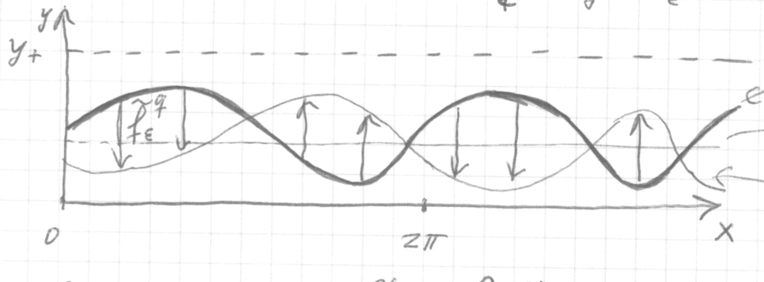
$f_0 : C \circlearrowleft$ tq $\tilde{f}_0(x,y) = (x + w(y), y)$ con $w'(y) > 0$.

$w(y_0^{p/q}) = 2\pi \frac{p}{q} \Rightarrow T_0^{p/q} = \mathbb{R} \times \{y_0^{p/q}\}$ curva invariante resonante.

3 El caso perturbado

$f_\varepsilon : C \circlearrowleft$ con $h_\varepsilon = h_0 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)$

Lema $\exists$ curvas radiales $T_\varepsilon^{p/q}$ y $\hat{T}_\varepsilon^{p/q}$ tales que $\tilde{f}_\varepsilon^q$ proyecta radialmente $T_\varepsilon^{p/q}$ sobre $\hat{T}_\varepsilon^{p/q}$



$T_\varepsilon^{p/q} = \{y = y_\varepsilon^{p/q}(x)\}$

$T_0^{p/q} = \{y \equiv y_0^{p/q}\}$

$\hat{T}_\varepsilon^{p/q} = \{y = \hat{y}_\varepsilon^{p/q}(x)\}$

- Flujo cero $\Rightarrow T_\varepsilon^{p/q} \cap \hat{T}_\varepsilon^{p/q} \neq \emptyset$
- $T_\varepsilon^{p/q} \cap \hat{T}_\varepsilon^{p/q} = \{$puntos $\frac{p}{q}$-periódicos$\}$
- $T_\varepsilon^{p/q} \neq \hat{T}_\varepsilon^{p/q} \Rightarrow$ Rotura $T_0^{p/q}$

$L_1^{p/q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ potencial de Melnikov radial

Tª: $\hat{y}_\varepsilon^{p/q}(x) - y_\varepsilon^{p/q}(x) = \frac{dL_\varepsilon^{p/q}}{dx}(x) = \varepsilon \frac{dL_1^{p/q}}{dx}(x) + O(\varepsilon^2)$

Fórmula de Melnikov: $L_1^{p/q}(x) = \sum_{k=1}^{q} h_1(x_{k-1}^{p/q}, x_k^{p/q})$ donde $x_k^{p/q} = x + 2\pi k \frac{p}{q}$.

Corolario: $L_1^{p/q}$ no cte $\Rightarrow$ Rotura.

4 Billares

Γ curva convexa

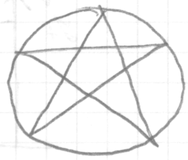
$s \in \mathbb{T}$ punto de impacto

$y = -\cos\phi \in (-1,1)$ donde ϕ = ángulo de incidencia-reflexión

$f: (s,y) \mapsto (s',y')$ aplicación billar (twist exacto).

$\Gamma_\varepsilon = \left\{ r_\varepsilon(\theta) = r_0 + \varepsilon \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{r}_j e^{ij\theta} + O(\varepsilon^2) \right\}$ circunferencia perturbada

(r,θ) coord. polares en $\mathbb{R}^2$.



$\varepsilon = 0 \Rightarrow q \geq 2,\ 1 \leq p \leq q/2,\ (p,q) = 1 \Rightarrow \exists\ T_0^{p/q}$ curva resonante

$p=2,\ q=5$

$\underline{\underline{T^a}}$ $\exists j \in q\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tq $\hat{r}_j \neq 0 \Rightarrow$ Rotura $T_0^{p/q}$

Observaciones finales

- curvas $\rightsquigarrow$ toros (completamente resonantes)
- Coord. acción-ángulo no imprescindibles
- $L_1^{p/q}$ cte $\Rightarrow$ A primer orden no se observa rotura
  $\Rightarrow$ Estudio términos orden superior