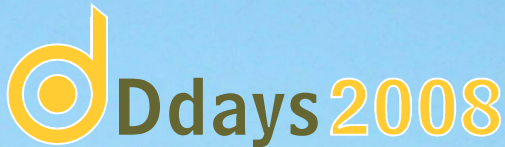


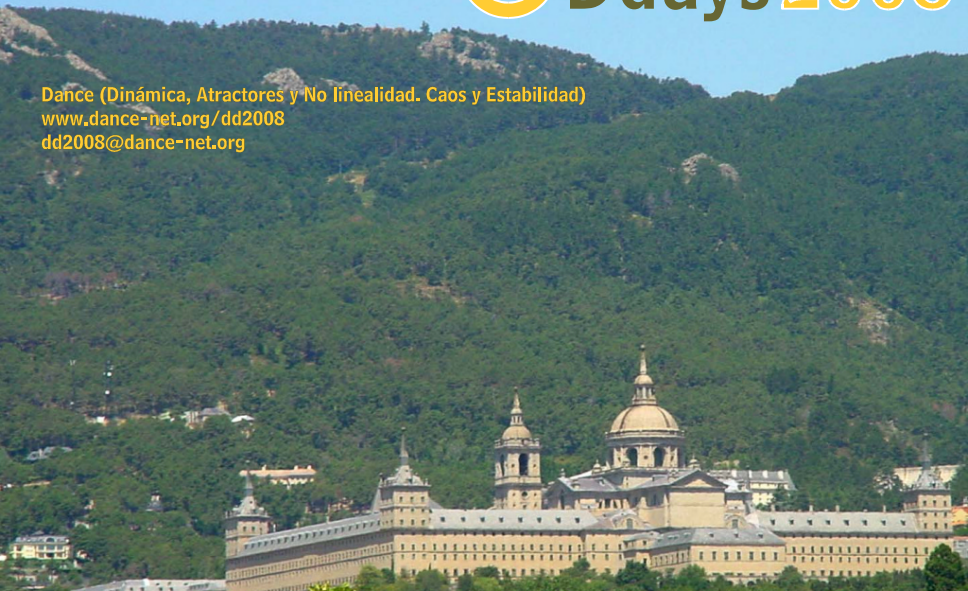
22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

The logo for Ddays 2008 features a stylized lowercase 'd' in yellow and orange, composed of concentric circles and a vertical bar. To its right, the text 'Ddays 2008' is displayed in a bold, sans-serif font, with 'Ddays' in dark grey and '2008' in yellow and orange.

Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)
www.dance-net.org/dd2008
dd2008@dance-net.org



Método de Taylor. Aplicaciones

Roberto Barrio, Fernando Blesa, Sergio Serrano

IUMA y GME, Depto. Matemática Aplicada – Universidad de Zaragoza, SPAIN
rbarrio@unizar.es, <http://gme.unizar.es>



DDAYS 2008
El Escorial, 22–24 Octubre 2008

▶ Estudio numérico de sistemas dinámicos

1 Método de Taylor

- Introducción al método
- Reglas de diferenciación automática
- Programación. Pros y contras
- Dependencia con respecto a parámetros: ODEs y DAEs
- Pruebas numéricas

2 Aplicaciones

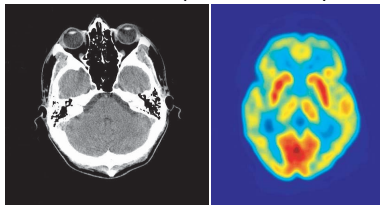
- Estabilidad del sistema solar
- Regiones regulares y caóticas
- Esqueletos de órbitas periódicas
- Ejemplos

Cálculo de invariantes

- 1 Orbitas periódicas
("El esqueleto de órbitas periódicas" → *Poincaré*)



- 2 Toros invariantes, variedades estable e inestable, etc **SESIÓN 4**
- 3 Movimiento regular o caótico ("La carne")



- 1 Orbitas periódicas → Integración a tiempos relativamente cortos del sistema y de las ecuaciones variacionales (a veces con gran precisión)
 - 2 Movimiento regular o caótico → Integración a tiempos medios y largos del sistema y de las ecuaciones variacionales
-

► MÉTODO DE TAYLOR

1 Inicialmente en Mecánica Celeste

- Steffensen (1956): PRTBP
- Broucke (1971): N-Body problem, Solar system.

2 Método numérico

- R. Moore (1966): Aritmética de intervalo.
- G. Wanner, G. Corliss

3 Grupos de Sistemas Dinámicos

- Carles Simó y colaboradores
A. Jorba and M. Zou
- John Guckenheimer y colaboradores
- Willy Goovaerts y colaboradores
- Ned Nedialkov y John Pryce
extensión a DAEs
- GME (Zaragoza)

TAYLOR

MATCONT

DAETS

en progreso (paciencia :-)

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

$$\mathbf{y}(t_i) \simeq \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i-1} + \frac{d\mathbf{y}(t_{i-1})}{dt} h_i + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{y}(t_{i-1})}{dt^2} h_i^2 + \dots + \frac{1}{p!} \frac{d^p\mathbf{y}(t_{i-1})}{dt^p} h_i^p.$$

En el caso de ODEs ($\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$):

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{y}''(t) = \mathbf{f}_t(t, \mathbf{y}(t)) + \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{y}'(t)$$

$$\mathbf{y}'''(t) = \mathbf{f}_{tt}(t, \mathbf{y}(t)) + \dots$$

$$f(x) = \frac{\csc(x) \log(x)}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{\csc(x)}{x^2} - \frac{\csc(x) \log(x)}{x^2} - \frac{\cot(x) \csc(x) \log(x)}{x}.$$

$$f''(x) = \frac{-3 \csc(x)}{x^3} - \frac{2 \cot(x) \csc(x)}{x^2} + \frac{2 \csc(x) \log(x)}{x^3} + \frac{2 \cot(x) \csc(x) \log(x)}{x^2} + \frac{\cot(x)^2 \csc(x) \log(x)}{x} + \frac{\csc(x)^3 \log(x)}{x}.$$

- Pero ... derivadas del segundo miembro del sistema diferencial
 - La "pega" en la mayor parte de los libros clásicos
 - Procesador simbólico
 - Diferenciación numérica
 - **Técnicas de Diferenciación Automática**
 - Coeficientes de Taylor exactos (salvo errores de redondeo)
 - Fácil de programar
- Librerías de precisión múltiple
 - `mpfun` y `mpf90` (Prof. D. H. Bailey *et al.*)
 - `gmp` (una librería GNU en C)
- Librerías de aritmética de intervalo
 - INTLIB, INTLAB, ...

NO
NO

Diferenciación automática

Proposición (Moore (1966)): Si $f, g, h : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son funciones de clase C^n y denotando $a^{[j]}(t) = \frac{1}{j!} a^{(j)}(t)$, tenemos

- Si $h(t) = f(t) \pm g(t)$ entonces $h^{[n]}(t) = f^{[n]}(t) \pm g^{[n]}(t)$

- Si $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ entonces $h^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n f^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t)$

- Si $h(t) = f(t)/g(t)$ entonces $h^{[n]}(t) = \frac{1}{g^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \sum_{i=1}^n h^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t) \right\}$

- Si $h(t) = f(t)^\alpha$ entonces

$$h^{[0]}(t) = (f^{[0]}(t))^\alpha, \quad h^{[n]}(t) = \frac{1}{n f^{[0]}(t)} \sum_{i=0}^{n-1} (n\alpha - i(\alpha + 1)) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t)$$

- Si $h(t) = \exp(f(t))$ entonces

$$h^{[0]}(t) = \exp(f^{[0]}(t)), \quad h^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t)$$

- Si $h(t) = \ln(f(t))$ entonces

$$h^{[0]}(t) = \ln(f^{[0]}(t)), \quad h^{[n]}(t) = \frac{1}{f^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t) \right\}$$

- Si $g(t) = \cos(f(t))$ and $h(t) = \sin(f(t))$ entonces

$$g^{[0]}(t) = \cos(f^{[0]}(t)), \quad g^{[n]}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t)$$

$$h^{[0]}(t) = \sin(f^{[0]}(t)), \quad h^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i g^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t)$$

- Paso variable¹

- Combinación de estimaciones del resto y el método de Newton

$$h = h_0 - \frac{h_0^{n-1} (A + h_0 B) - \text{Tol}}{h_0^n ((n-1)A + h_0 n B)}.$$

con $\text{Tol} = \min \left\{ \text{TolRel} \cdot \max \{ \|\mathbf{y}^{[0]}(t_j)\|_\infty, \|\mathbf{y}^{[1]}(t_j)\|_\infty \}, \text{TolAbs} \right\}$ y

$$A = \|\mathbf{y}^{[n-1]}(t_j)\|_\infty, \quad B = n \|\mathbf{y}^{[n]}(t_j)\|_\infty$$

- Información de los dos últimos coeficientes (métodos encajados)

$$h = \text{fac} \cdot \min \left\{ \left(\frac{\text{Tol}}{\|\mathbf{y}^{[n-1]}(t_j)\|_\infty} \right)^{1/(n-1)}, \left(\frac{\text{Tol}}{\|\mathbf{y}^{[n]}(t_j)\|_\infty} \right)^{1/n} \right\}$$

- *Defect error control* (posibles estimaciones de paso rechazadas, **no se rechazan pasos**)

Si $\|\mathbf{y}'_{i+1} - \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})\|_\infty > \text{Tol}$ entonces $\tilde{h}_{i+1} = \text{facr} \cdot h_{i+1}$,

¹R. Barrio, Appl. Math. Comput. 163 (2005) 525–545.

- Orden Variable²

```

if i = M then
    ni+1 = ni
    hmax = max{ hi-M, ..., hi-1 }, hmin = min{ hi-M, ..., hi-1 }
    if ((hi-M < hmin) .or. (hi-M = hmin .and. ni-1 > ni)) then
        hest- = tol1/(ni-p+1) . ||Yni-p||∞-1/(ni-p)
        if ( ( (ni - p + 1) / (ni + 1) )2 < fac1 . hest- / hi ) then
            ni+1 = ni - p
        end if
    else if ((hi-M > hmax) .or. (hi-M = hmax .and. ni-1 < ni)) then
        ρest = min { || Yni-1 / Yni ||∞, || Yni-2 / Yni ||∞1/2, || Yni-3 / Yni-1 ||∞1/2 }
        hest+ = tol1/(ni+p+1) . ( ||Yni||∞ / ρestp )-1/(ni+p)
        if ( ( (ni + p + 1) / (ni + 1) )2 < fac2 . hest+ / hi ) then
            ni+1 = ni + p
        end if
    end if
else
    ni+1 = ni
end if

```

²R. Barrio, F. Blesa and M. Lara, Comput. Math. Appl. 50 (1-2) (2005) 93–111.

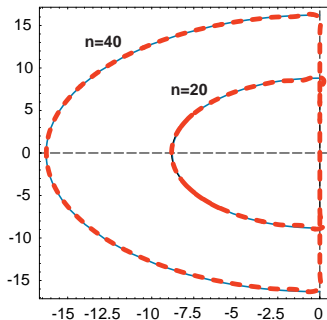
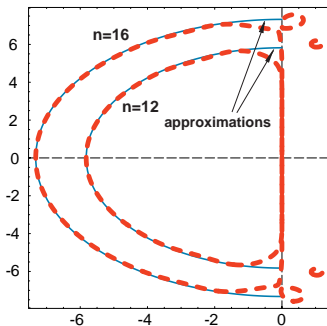
● Pros

- Salida densa → Secciones de Poincaré
- Buena estabilidad (como método explícito)
- Versátil (ODEs, DAEs, BVPs, ecuaciones variacionales de cualquier orden, ...)
- Métodos numéricos de cualquier orden
- Precisión arbitraria
- Paso y orden variable
- Método fundamental en la construcción de métodos con aritmética de intervalo. Básico en pruebas asistidas por ordenador.
(Ver **SESIÓN 4**)

● Contras

- No es válido para problemas de tipo *stiff*
- Costoso de programar → Usar alguno de los programas ya existentes

- El método de Taylor no es útil en problemas muy *stiff*



Proposición

El dominio de estabilidad de los métodos de Taylor tiende a un semicírculo en el semiplano complejo negativo de radio:

$$r(n) \approx r_{\text{approx}}(n) = 1.3614 + 0.3725 n$$

Dependencia de parámetros de ODEs/DAEs

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \mathbf{p}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto de parámetros $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^s$.

Para estudiar la dependencia con respecto de los parámetros (Sensitivity analysis) se estudian las derivadas parciales de la solución del sistema con respecto a los parámetros. Esto produce $n \cdot s$ ecuaciones adicionales

$$\mathbf{s}'_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{s}_k + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}_k}, \quad k = 1, \dots, s$$

donde $\mathbf{s}_k = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}_k}$.

Dependencia de parámetros de ODEs/DAEs

Sea una DAE

$$\mathbf{Fy} := \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots) = 0, \quad (1)$$

$$\Phi \mathbf{y}_0 := \phi(t_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}'_0, \dots) = 0 \quad (2)$$

Teorema

^a Let the DAE $\mathbf{Fy} = 0$ be analytic in a neighbourhood of a consistent point. Then the Taylor series method applied at this point succeeds iff the $n \times n$ matrix \mathbf{J} is nonsingular at this point, where

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial y_j^{(d_j - c_i)}}, & \text{if this derivative is present,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

^aJ. D. Pryce, Numer. Algorithms 19 (1998) 195–211.

Método extendido de Taylor para DAEs

$$-J \cdot (\mathbf{y}')_i = (\mathbf{Fy})_{i0}, \quad -J \cdot (\mathbf{s}'_k)_i = \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{Fy} \right)_{i0}, \quad -J \cdot (\mathbf{s}'_{kj})_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_j} \mathbf{Fy} \right)_{i0}.$$

Proposition

^a If $f(t, \mathbf{y}(t)), g(t, \mathbf{y}(t)) : (t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{s+1} \mapsto \mathbb{R}$ are functions of class \mathcal{C}^n , $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{N}_0^s$ a vector with the partial derivative orders, $\mathbf{i}^* = \mathbf{i} - (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = (i_1, i_2, \dots, i_k - 1, 0, \dots, 0)$ (that is, we subtract 1 to the last non-zero element i_k of \mathbf{i} if $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$) and $\|\mathbf{i}\| = \sum_{j=1}^s i_j$ the total order of derivation, we denote

$$f^{[j, \mathbf{i}]} := \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|\mathbf{i}|} f^{(j)}(t)}{\partial y_1^{i_1} \partial y_2^{i_2} \dots \partial y_s^{i_s}}, \quad f^{[j, \mathbf{0}]} := f^{[j]} = \frac{1}{j!} \frac{d^j f(t)}{dt^j},$$

that is, the j th Taylor coefficient of the partial derivative of $f(t, \mathbf{y}(t))$ with respect to \mathbf{i} and

$$\tilde{h}_{n, \mathbf{i}}^{[j, \mathbf{v}]} = h^{[j, \mathbf{v}]}, \quad (j \neq n \text{ or } \mathbf{v} \neq \mathbf{i}), \quad \tilde{h}_{n, \mathbf{i}}^{[n, \mathbf{i}]} = 0.$$

Besides, given $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{N}_0^s$ we define the multi-combinatorial number $\binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} = \binom{i_1}{v_1} \cdot \binom{i_2}{v_2} \dots \binom{i_s}{v_s}$, and we consider the classical partial order in \mathbb{N}_0^s . Then, we have

- (i) If $h(t) = f(t) \pm g(t)$ then $h^{[n, \mathbf{i}]} = f^{[n, \mathbf{i}]} \pm g^{[n, \mathbf{i}]}$.
- (ii) If $h(t) = \alpha f(t)$ with $\alpha \in \mathbb{R}$ then $h^{[n, \mathbf{i}]} = \alpha f^{[n, \mathbf{i}]}$.
- (iii) If $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ then $h^{[n, \mathbf{i}]} = \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}} \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \left\{ \sum_{j=0}^n f^{[n-j, \mathbf{v}]} \cdot g^{[j, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} \right\}$.

^aR. Barrio, SIAM J. Sci. Comput. 27 (6) (2006) 1929–1947.

Proposition (cont.)

(v) If $h(t) = f(t)^\alpha$ with $\alpha \in \mathbb{R}$ then

$$h^{[0, \mathbf{0}]} = (f^{[0]}(t))^\alpha,$$

$$h^{[0, \mathbf{i}]} = \frac{1}{f^{[0]}} \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}^*} \binom{\mathbf{i}^*}{\mathbf{v}} \left\{ \alpha h^{[0, \mathbf{v}]} \cdot f^{[0, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} - \tilde{h}_{0, \mathbf{i}}^{[0, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} \cdot f^{[0, \mathbf{v}]} \right\}, \quad \mathbf{i} > \mathbf{0},$$

$$h^{[n, \mathbf{i}]} = \frac{1}{n f^{[0]}} \sum_{j=0}^n (n\alpha - j(\alpha + 1)) \left\{ \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}} \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \tilde{h}_{n, \mathbf{i}}^{[j, \mathbf{v}]} \cdot f^{[n-j, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} \right\}, \quad n > 0, \mathbf{i} > \mathbf{0}.$$

(vii) If $h(t) = \ln(f(t))$ then

$$h^{[0, \mathbf{0}]} = \ln(f^{[0]}(t)),$$

$$h^{[0, \mathbf{i}]} = \frac{1}{f^{[0]}} \left(f^{[0, \mathbf{i}]} - \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{v} \leq \mathbf{i}^*} \binom{\mathbf{i}^*}{\mathbf{v}} h^{[0, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} \cdot f^{[0, \mathbf{v}]} \right), \quad \mathbf{i} > \mathbf{0},$$

$$h^{[n, \mathbf{i}]} = \frac{1}{f^{[0]}} \left(f^{[n, \mathbf{i}]} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \left\{ \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}} \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \tilde{h}_{n, \mathbf{i}}^{[n-j, \mathbf{i}-\mathbf{v}]} \cdot f^{[j, \mathbf{v}]} \right\} \right), \quad n > 0, \mathbf{i} > \mathbf{0}.$$

Complejidad computacional

Proposition

If the evaluation of $f(t, \mathbf{y}(t))$ involves k elementary functions (\times , $/$, \ln , \exp , \sin , \cos , ...) then the computational complexity of the evaluation of $f^{[0]}$, $f^{[1]}$, ..., $f^{[n-1]}$ is $k n^2 + \mathcal{O}(n)$. (In the case of linear functions $k n + \mathcal{O}(1)$)

Proposition

If the evaluation of $f(t, \mathbf{y}(t))$ involves k elementary functions (\times , $/$, \ln , \exp , \sin , \cos , ...) and given $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{N}_0^s$ then the computational complexity of the evaluation of $f^{[0, \mathbf{i}]}$, $f^{[1, \mathbf{i}]}$, ..., $f^{[n-1, \mathbf{i}]}$, supposing already known all the derivatives of index $\mathbf{v} < \mathbf{i}$, is

$$\mathcal{O} \left(\prod_{j=1}^s (i_j + 1) \cdot k n^2 \right).$$

Corollary

The computational complexity of evaluating the Taylor coefficients of a partial derivative of f is twice the complexity of evaluating the Taylor coefficients of f , and the computational complexity of evaluating the Taylor coefficients of a second order partial

Problema de dos cuerpos (Kepler)

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

KEPLER PROBLEM

```
for m=0 to n-2 do
  c = (1+m)(2+m)

  s1[m] = x x x[m] + y y y[m]
  s2[m] = (s1)^-3/2[m]

  x[m+2] = -x x s2[m] / c
  y[m+2] = -y y s2[m] / c

end
```

KEPLER PROBLEM & SENSITIVITY VALUES

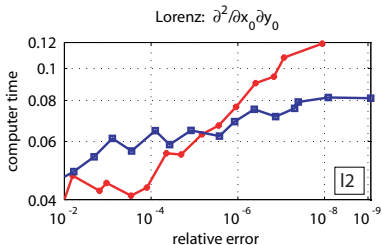
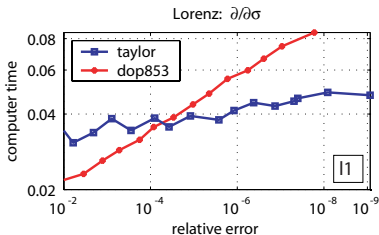
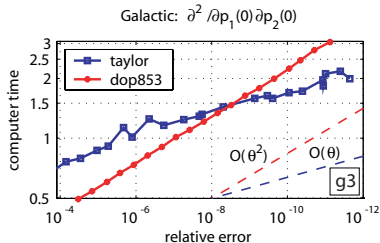
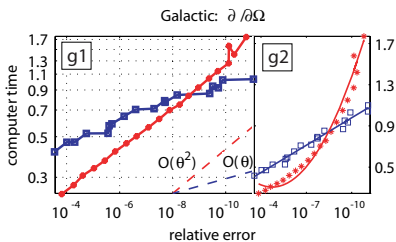
```
for m=0 to n-2 do
  c = (1+m)(2+m)
  for v=0 to i do
    s1[m,v] = x x x[m,v] + y y y[m,v]
    s2[m,v] = (s1)^-3/2[m,v]

    x[m+2,v] = -x x s2[m,v] / c
    y[m+2,v] = -y y s2[m,v] / c

  end
end
```

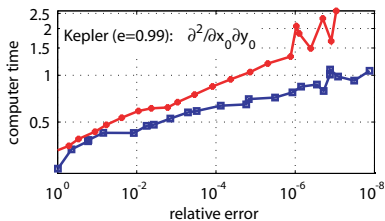
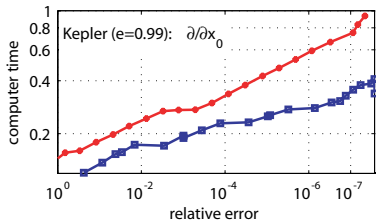
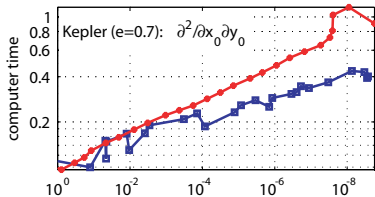
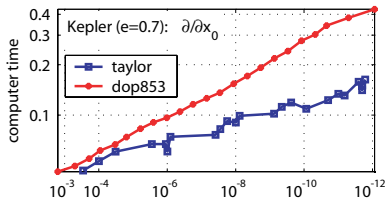
Pruebas numéricas: ODEs

- Taylor series method vs. DOP853 (Hairer & Wanner)



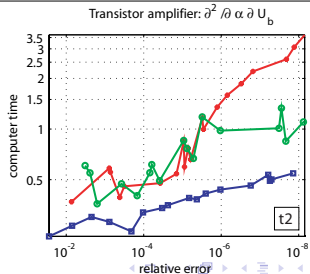
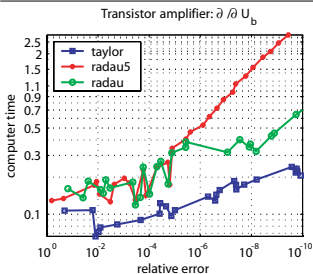
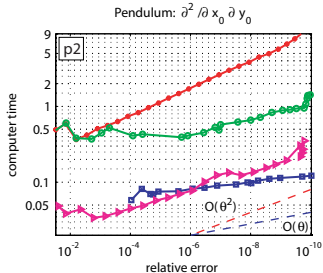
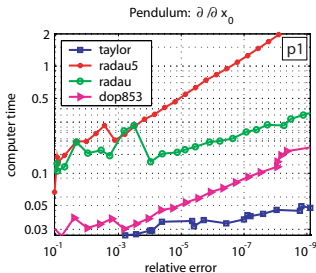
Pruebas numéricas: ODEs

- Taylor series method vs. DOP853 (Hairer & Wanner)



Pruebas numéricas: DAEs

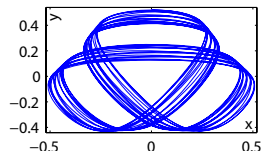
- TSM vs. DOP853, RADAU5, RADAU (Hairer & Wanner),



Cuando la alta precisión es necesaria

• Problema de Hénon-Heiles

CO	Tol	TAYLOR				dop853			
		CPU	Steps	Deg	RelErr	CPU	Steps	RelErr	
dp	10^{-10}	0.53E-02	656	15	0.201E-10	0.34E-02	766	0.205E-06	
dp	10^{-15}	0.12E-01	1489	15	0.345E-13	0.15E-01	4010	0.113E-11	
qp	10^{-20}	0.30E+00	820	23	0.300E-20	0.30E+01	13691	0.102E-17	
qp	10^{-25}	0.61E+00	1196	28	0.165E-26	0.12E+02	71429	0.325E-23	
mpf90	10^{-32}	0.13E+01	290	49	0.782E-29				
mpf90	10^{-64}	0.89E+01	711	73	0.144E-65				
mpf90	10^{-128}	0.74E+02	1020	147	0.432E-131				

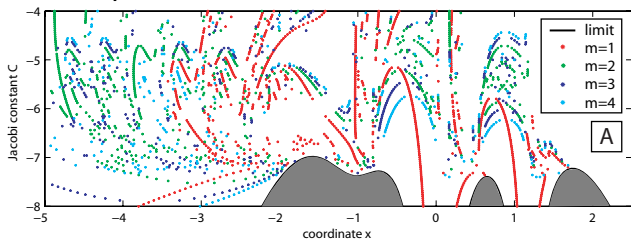


Cuando se necesita una alta precisión el método de las series de Taylor se convierte en el método más rápido, y a veces el único aplicable

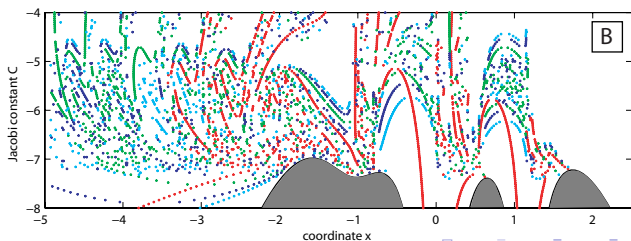
Cuando la alta precisión es necesaria

- Escisión de separatrices en sistemas casi-integrables (Simó *et al.*)
- Esqueletos de órbitas periódicas

double
precision



quadruple
precision



Estabilidad del sistema solar: Wayne B. Hayes

- *Is the outer Solar System chaotic?*, Nature Physics 3, 689-691 (2007).
- *Surfing on the edge: chaos versus near-integrability in the system of Jovian planets*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 386, 295-306 (2008).

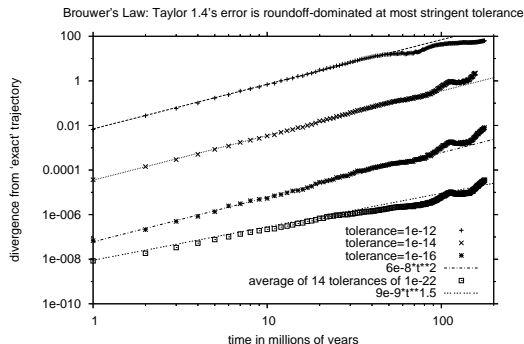
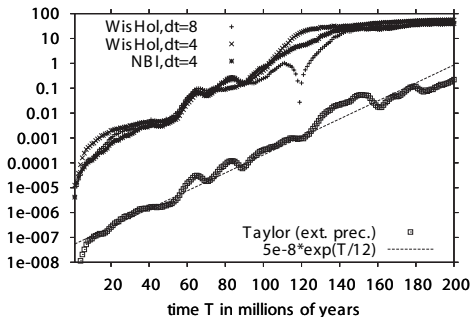


Fig. 1.— *Taylor 1.4* satisfies Brouwer's Law: when local tolerance is set above machine precision of 10^{-19} , phase-space error grows as t^2 due to biased truncation errors (upper three curves). But with tolerance set well below the machine precision, its result is exact (*i.e.*, correctly rounded) to machine precision, so that phase-space error grows only as $t^{1.5}$ (lowest curve).

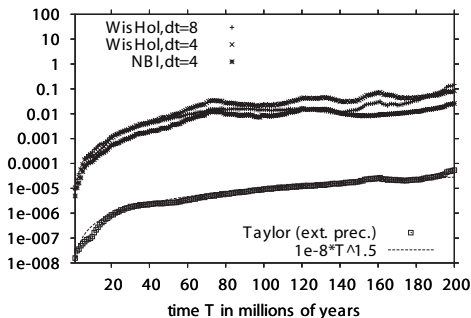
Estabilidad del sistema solar: Wayne B. Hayes

- *Is the outer Solar System chaotic?*, Nature Physics 3, 689-691 (2007).
- *Surfing on the edge: chaos versus near-integrability in the system of Jovian planets*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 386, 295-306 (2008).

Chaotic orbit

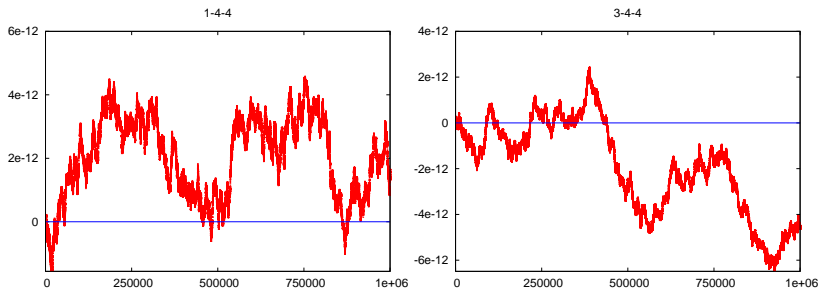


Non-chaotic orbit



Long range integrations

For $\mu = 0.001$ a test on a sample of 175 i. c. as follows: $\Delta\rho = 0.0005$; $\alpha = 0.1 (0.05) 0.4$; $z = 0 (0.2) 0.8$, heliocentric, from a suitable origin of $\rho = R - 1$, α in revolutions. 75 points subsist for $t_{\text{final}} = 10^9$ Jupiter revolutions (\approx **twice the age of Solar System**).



Shown: the 3 worst cases and the best one.

Errors w.r.t. initial energy displayed every 1000 Jupiter revolutions (J.r.).

Técnicas de detección de caos

- Superficies de sección de Poincaré: 2DOF
- Maximum Lyapunov Exponent (MLE): $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta \mathbf{y}(t)\|}{\|\delta \mathbf{y}(0)\|}$

Clasificación de indicadores rápidos de caos:

- Métodos que usan las ecuaciones variacionales:

Helicity and Twist Angles (Contopoulos & Voglis), Smaller ALignment Index (SALI) (Skokos), Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO) (Cincotta & Simó), Fast Lyapunov Indicator (FLI) (Froeschlé & Lega), OFLI_{TT}² or OFLI2 (Barrio).

- Métodos basados en series temporales:

Frequency Map Analysis (Laskar), Spectral Number (SN) (Michtchenko & Ferraz-Mello), Integrated Autocorrelation Function (IAF) (B., Borczyk & Breiter).

Indicadores de caos: OFLI2

- Indicador OFLI2³

$$\text{OFLI2} := \sup_{0 < t < t_f} \log \|\{\delta \mathbf{y}(t) + \frac{1}{2} \delta^2 \mathbf{y}(t)\}^\perp\|,$$

donde $\delta \mathbf{y}$ and $\delta^2 \mathbf{y}$ son las ecuaciones variacionales de orden uno y dos con respecto a condiciones iniciales prefijadas y dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), & \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0, \\ \frac{d\delta \mathbf{y}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y}, & \delta \mathbf{y}(0) &= \frac{\mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0)}{\|\mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0)\|}, \\ \frac{d\delta^2 \mathbf{y}_j}{dt} &= \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{y}} \delta^2 \mathbf{y} + \delta \mathbf{y}^\top \frac{\partial^2 f_j}{\partial \mathbf{y}^2} \delta \mathbf{y}, & \delta^2 \mathbf{y}(0) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

- Minimiza la aparición de estructuras espúreas.
- Usando argumentos KAM:
 - OFLI2 tiende a un valor constante para órbitas periódicas
 - evoluciona linealmente para órbitas en un toro KAM
 - crece exponencialmente para órbitas caóticas

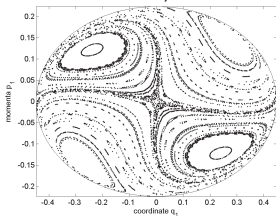
³R. Barrio, Chaos Solitons Fractals 25 (3) (2005) 711–726.

R. Barrio, Internat. J. Bifur. Chaos 16 (10) (2006) 2777–2798.

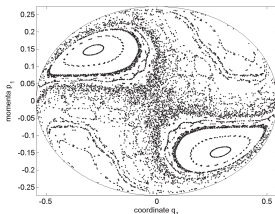
Péndulo extensible

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} ((1 - c) q_1^2 + q_2^2 - c q_1^2 q_2),$$

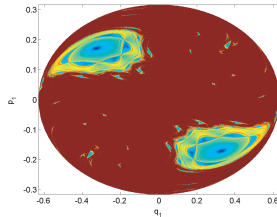
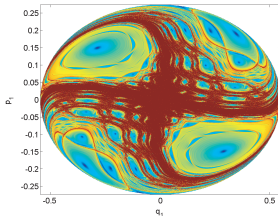
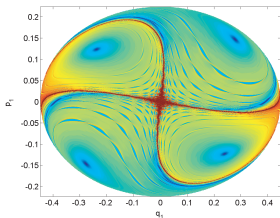
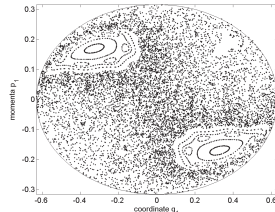
E=20/800, c=0.75



E=30/800



E=40/800



Búsqueda sistemática de órbitas periódicas simétricas

- Birkhoff, DeVogelaere, Strömberg, Hénon, Lamb & Roberts ...

Theorem

Let $o(x)$ be an orbit of a flow of an autonomous vector field with a reversal symmetry S . Then an orbit $o(x)$ intersects $\text{Fix}(S) := \{x \mid S(x) = x\}$ in precisely *two points* iff the orbit is *periodic* (and not a fixed point) and *symmetric* with respect to S .

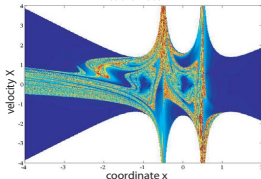
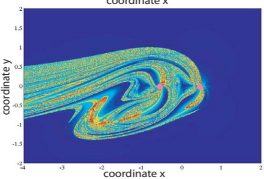
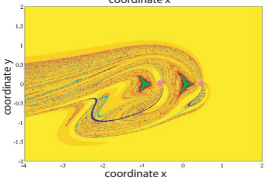
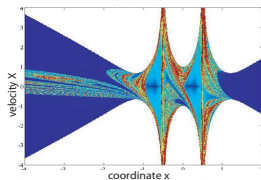
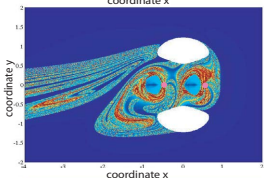
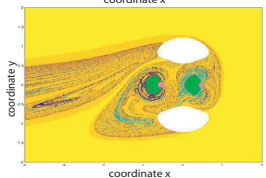
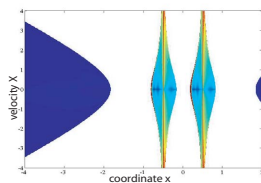
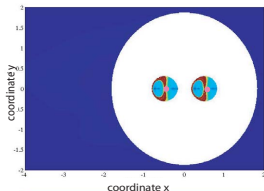
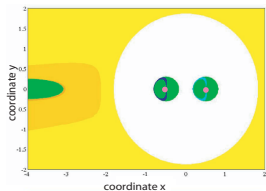
- Condiciones iniciales: $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, y_0, \dot{x}_0, 0)$.
- Condiciones de periodicidad: $x(0, y_0, \dot{x}_0, 0; T/2) = 0, \dot{y}(0, y_0, \dot{x}_0, 0; T/2) = 0$.

- Técnicas numéricas adaptadas⁴: Método de Brent y el método de Taylor
→ cálculo muy preciso de o.p.s.
- Gran número de o.p.s.

- ◇ Índice de estabilidad de (Hénon): $\kappa = \text{Tr}(\Pi(T)) - 2$
→ Solución de las ecuaciones variacionales de primer orden.
- ◇ Una órbita periódica con $\kappa \neq 2$ (Meyer) puede ser continuada.
- ◇ Bifurcaciones de multiplicidad m : $\kappa = 2 \cos(2\pi k/m)$.

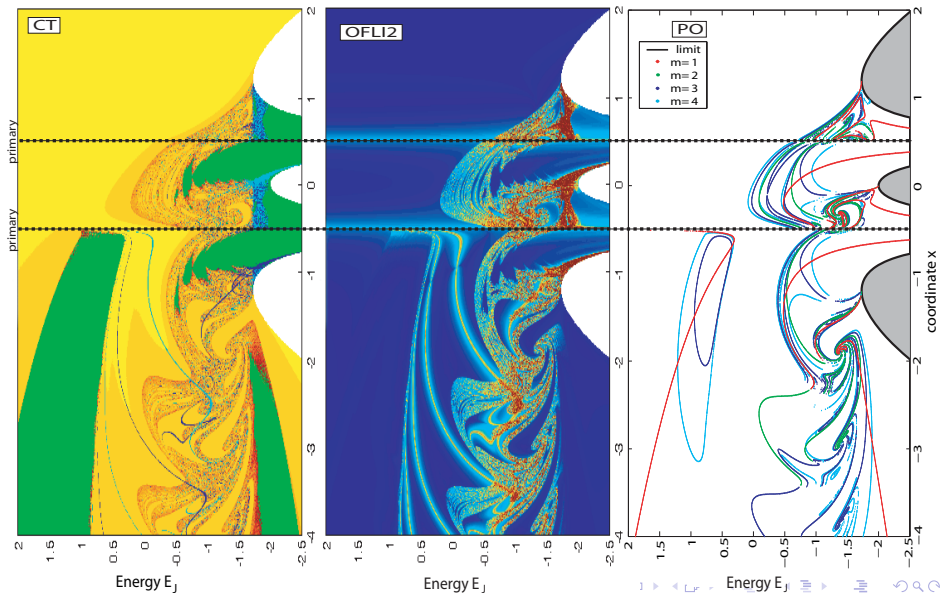
⁴R. Barrio and F. Blesa, Chaos Solitons Fractals, In Press.

The Copenhagen Problem⁵



⁵R. Barrio, F. Blesa, S. Serrano, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, In Press.

The Copenhagen Problem: (E_J, x) plane



El anillo de (N+1)-cuerpos⁶

Ecuaciones del movimiento

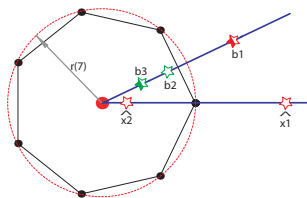
$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

donde

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\beta}{r_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \right)$$

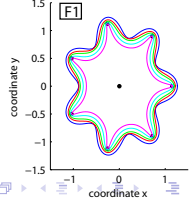
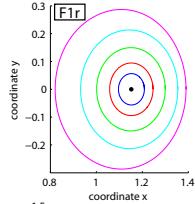
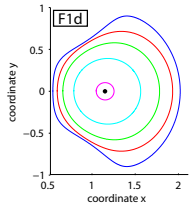
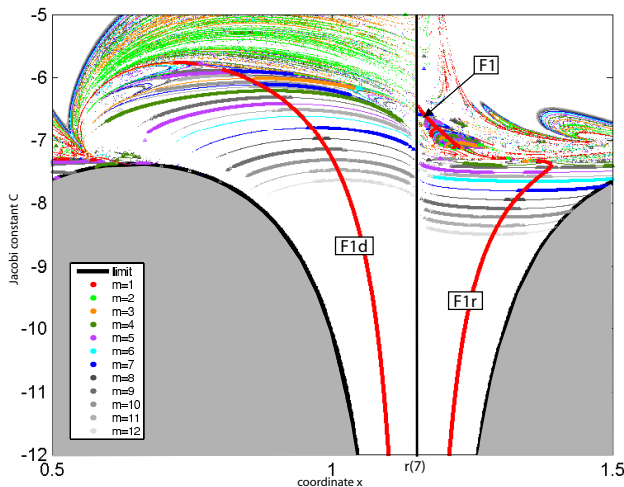
es el potencial efectivo y $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, $i = 1, \dots, N$ son las distancias de la partícula a cada primario

$$\Delta = M(\Lambda + \beta M^2),$$
$$\Lambda = \sin^2 \theta \sum_{i=2}^N \frac{1}{\sin((i-1)\theta)}, \quad M = 2 \sin \theta,$$
$$\theta = \pi/N$$

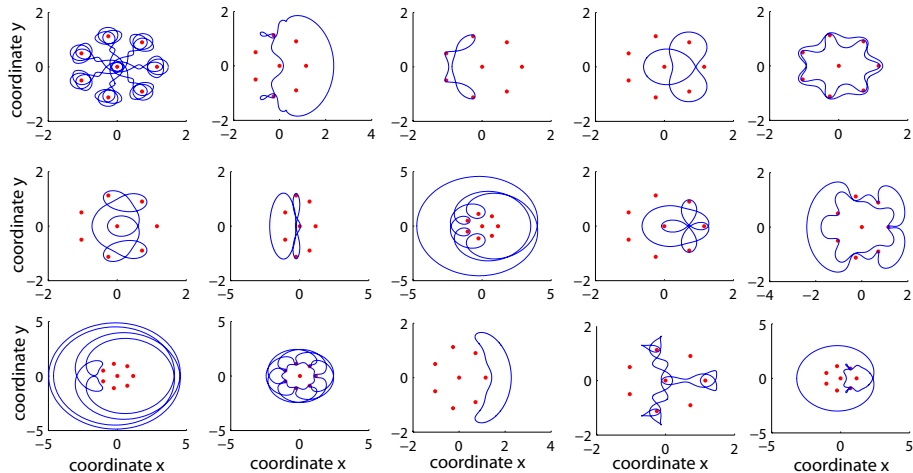


⁶R. Barrio, F. Blesa, S. Serrano, *Chaos, Solitons and Fractals*, 36, 1067-1088 (2008)

Familias de órbitas periódicas simétricas

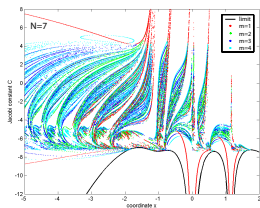


Una galería de o.p.s. para el anillo de $(7+1)$ -cuerpos



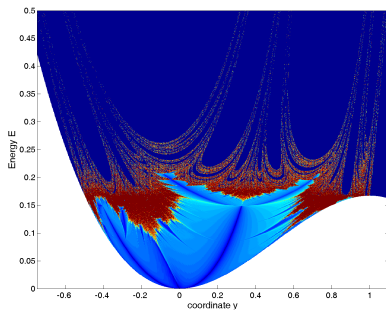
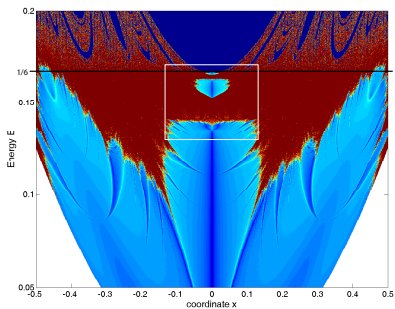
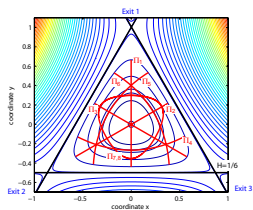
Esqueleto + OFLI2

OFLI2, planchas 600×600 ($\approx 40,000,000$ órbitas)



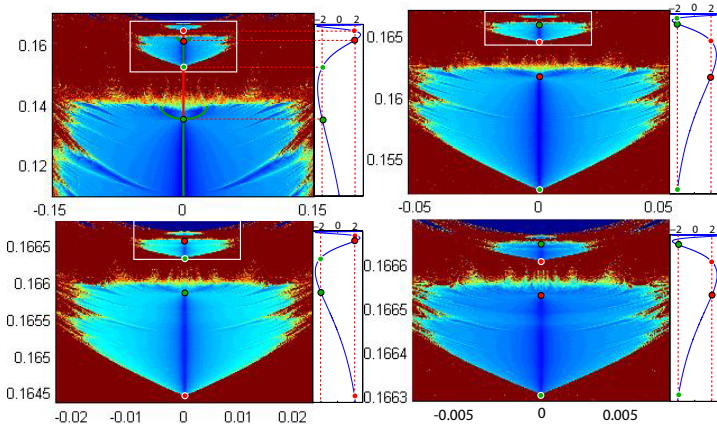
Hamiltoniano de Hénon-Heiles⁷

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x^2y - \frac{1}{3}y^3)$$



⁷ Barrio, R., Blesa, F., Serrano, S., *Europhysics Letters*, 82 (2008).

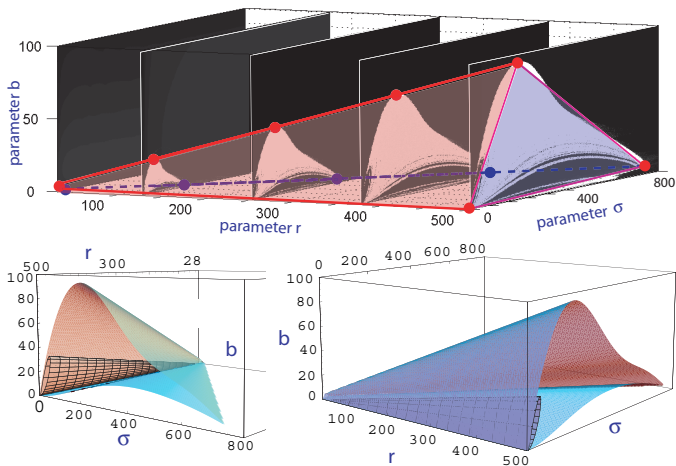
Hamiltoniano de Hénon-Heiles: estructuras fractales



- Las órbitas periódicas Π_1 (Π_2 y Π_3) experimentan una secuencia de infinitas transiciones de tipos de estabilidad (Churchill *et al* (1980))

- Las transiciones ocurren en una secuencia de bifurcaciones isocronas y de duplicación de periodo (aparecen constantes de tipo Feigenbaum)

Sistema de Lorenz: modelo de la zona caótica



Teorema

Una vez fijado $r > 1$ la región en la que puede existir comportamiento caótico está acotada en b y σ (para $b \geq \epsilon > 0$). Más aún, fuera de una región acotada cada semiórbita positiva del sistema de Lorenz converge a un punto de equilibrio.

- 1 Métodos clásicos adaptados dan lugar a métodos altamente eficientes
- 2 El método de Taylor posee características muy útiles en la simulación de sistemas dinámicos
 - Permite obtener soluciones con precisión arbitraria
 - Enlaza con métodos de cálculo de órbitas periódicas, indicadores de caos, cálculo de toros, variedades estable e inestable, etc



Gracias por vuestra atención :-))))