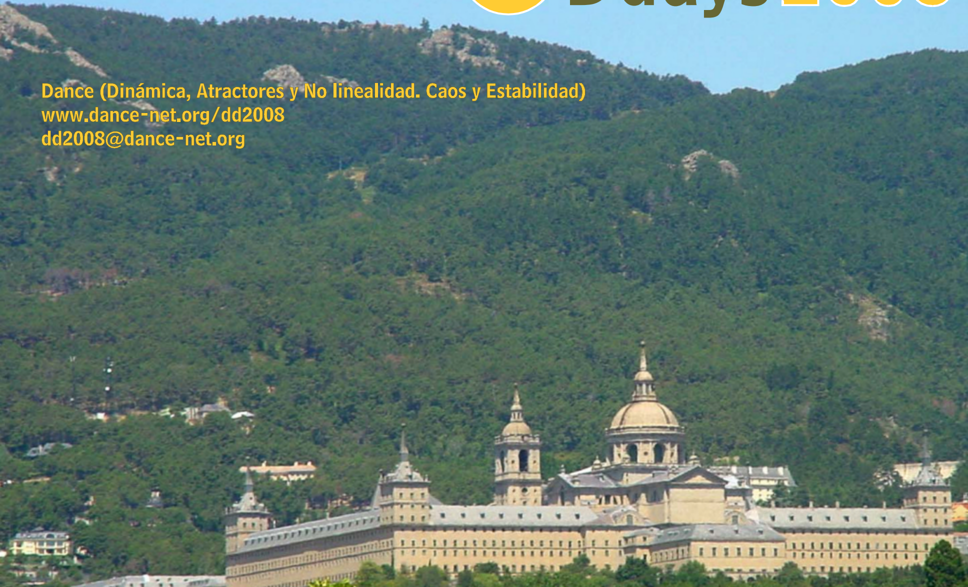
22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)
www.dance-net.org/dd2008
dd2008@dance-net.org



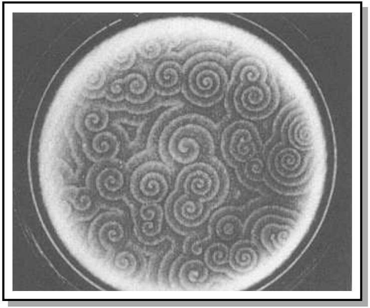
Espirales en ecuaciones de Ginzburg-Landau complejas

M. Aguareles (Universitat Politècnica de Catalunya)
S. J. Chapman (University of Oxford)

Ddays, El Escorial, 23/10/2008

Ondas espirales en sistemas físicos

Sistema excitable: Colonia de Dictyostelium discoideum



Sistema oscilatorio: Reacción de Belousov-Zhabotinsky

La ecuación de Ginzburg-Landau compleja

Ecuación de Ginzburg-Landau compleja

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi - (1 + ia)|\Psi|^2\Psi + (1 + ib)\Delta\Psi$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, y $\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

- Es una ecuación de amplitud para sistemas físicos oscilatorios.
- Cuando $a = b = 0 \Rightarrow$ ecuación de Ginzburg-Landau - superconductividad.
- Cuando $a = b \to \infty \Rightarrow$ ecuación de Schrödinger no lineal - superfluidez.

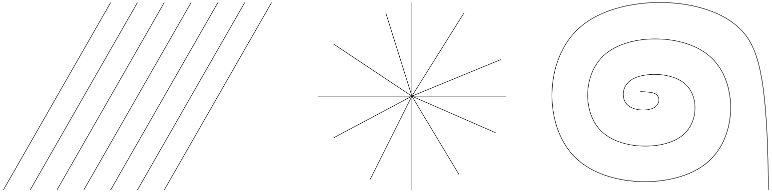
La ecuación de Ginzburg-Landau compleja

Algunas propiedades de la ecuación:

- Algunas soluciones: ondas planas y **ondas espirales**.
- Las soluciones son **invariantes por translación** ($\Psi(x+x_0,t)$ también es solucion).
- Las soluciones son **invariantes por rotación** ($\Psi e^{i\varphi_0}$, es solución $\forall\varphi_0 \in \mathbb{R}$).

Ondas planas, ondas espirales y vórtices

Curvas de nivel de la parte real o imaginaria de Ψ de soluciones periódicas:



Ondas planas	**Vórtice**	**Espirales**
$\Psi(\mathbf{x},t) = R\, e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t)}$	cuando $a = b$	cuando $a \neq b$
$R^2 = 1 - \lvert\mathbf{k}\rvert^2$	$\Psi = f(r)e^{i(n\phi-\omega t)}$	$\Psi = f(r)e^{i(n\phi+\varphi(r)-\omega t)}$
$\lvert\mathbf{k}\rvert^2 = \frac{a-\omega}{a-b}$	$\omega = a = b$	$\text{lím}_{r\to\infty}\, \varphi'(r) = \pm k(\omega)$

Ondas espirales y vórtices

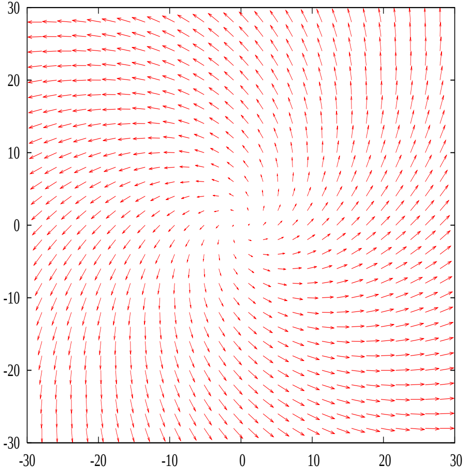
Son ondas de rotación con grado no nulo n:

$\Psi = f(r)\, e^{i(\chi(r,\phi)-\omega t)}$	forma de la solución
$\chi = n\phi + \varphi(r)$	fase de la solución
$\oint_{\partial\Omega} \nabla\chi \cdot dl = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$	condición sobre el grado
$\lim_{r\to\infty} \nabla\chi = k\,\mathbf{e_r}$	k número de ondas asintótico

Observación: la frecuencia, ω, y el número de ondas asintótico, k, quedan determinados de forma única por a y b.

Ondas espirales y vórtices

Soluciones en forma de onda espiral: $f(r)(\cos(n\phi + \varphi(r)), \sin(n\phi + \varphi(r))$



Vórtices

Caso particular en el que $a = b = \omega$

Soluciones de tipo vórtice: $\partial t\Psi = (1+ia)\Delta\Psi + \Psi - (1+ia)|\Psi|^2\Psi$

$$\chi(r,\phi) = n\phi, \quad \Psi = f(r)\,e^{i(n\phi - at)}$$

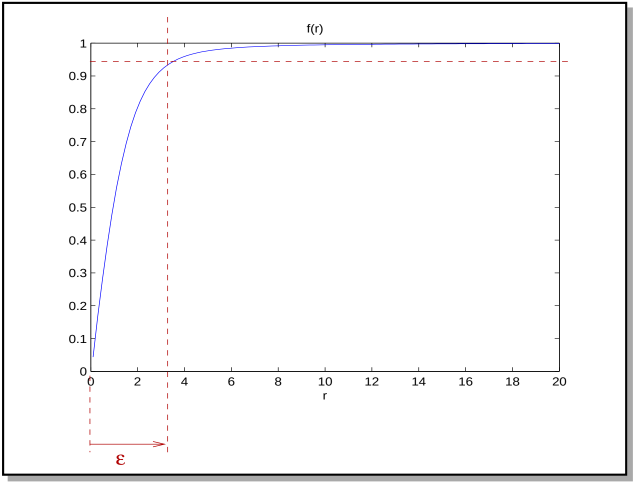
$$f_{rr} + \frac{f_r}{r} - f\frac{n^2}{r^2} + (1-f^2)f = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = 1$$

Existe una única solución con estas condiciones. El número de ondas correspondiente, k, es nulo.

Vórtices

Módulo de la solución, $f(r)$, escala del problema:



Soluciones de equilibrio con simetría

SOLUCIONES CON UNA SOLA ESPIRAL:

Con el cambio $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$, y reorganizando los parámetros,

$$(1 - ib)\frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 - |\psi|^2)\psi + iq\psi(1 - k^2 - |\psi|^2) + \Delta\psi,$$

$$q = \frac{a - b}{1 + ab} \qquad q(1 - k^2) = \frac{\omega - b}{1 + b\omega}$$

- Para simplificar los cálculos tomamos $b = 0$.
- Las soluciones en onda espiral, de la forma $\Psi = f(r)e^{i(n\phi+\varphi(r))}$, son soluciones de equilibrio de este problema. En realidad es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Soluciones de equilibrio con cierta simetría radial

- Con métodos asintóticos se demuestra ([1]) que el número de ondas asintótico k depende de forma unívoca de q. Concretamente, para valores pequeños de q

$$k(q) = \frac{2}{q} e^{c_n - \gamma - \frac{\pi}{2q|n|}} (1 + o(1)),$$

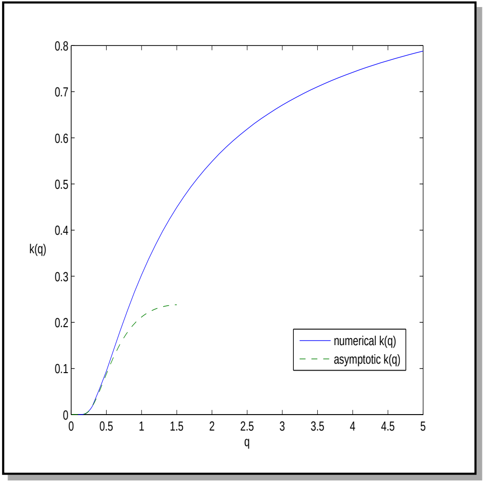
donde c_n es una constante independiente de q y γ es la gamma de Euler.

- Además, la solución satisface $f(r) \sim Cr^n$ y $\chi_r(0) = 0$ cuando $r \to 0$ y $f(r)$, $\chi_r(r)$ acotadas cuando $r \to \infty$,

$$f \sim \left(1 - k^2\right)^{1/2} + \mathcal{O}(1/r) \qquad \chi_r \sim -k - \frac{1}{2qr} + \mathcal{O}(1/r^2)$$

[1] P.S. Hagan. *Spiral waves in reaction-diffusion equations.* SIAM J. Appl. Math., 42, 1982.

Número de ondas asintótico en función de q.



Ecuaciones del movimiento para los centros de las espirales: reducción de la EDP a un sistema de EDOs.

- Consideramos espirales con distancias de separación grandes, $1/\epsilon$, y con $n = \pm 1$.
- Hipótesis:
  1. Suponemos que las espirales se mueven despacio y que su movimiento define la dinámica del patrón (son estructuralmente estables).
  2. Calculamos la solución "outer" lejos de los centros de las espirales y el desarrollo "inner" cerca de cada uno de ellos.
  3. Linealizando en la zona "inner" encontraremos una condición de compatibilidad que determina la velocidad de los vórtices.

Ecuaciones del movimiento para los centros de las espirales: reducción de la EDP a un sistema de EDOs.

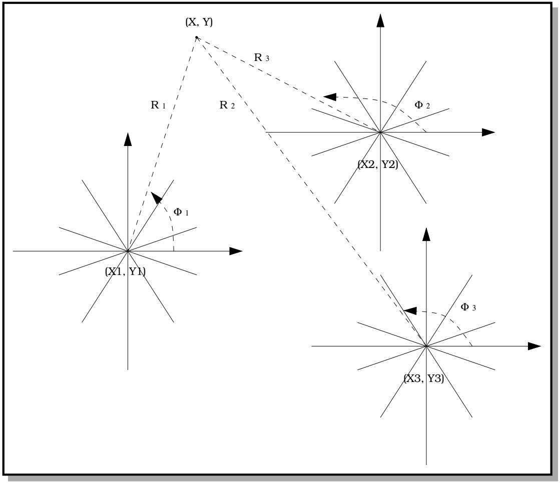
- Consideramos espirales con distancias de separación grandes, $1/\epsilon$, y con $n = \pm 1$.
- Hipótesis:
  1. Suponemos que las espirales se mueven despacio y que su movimiento define la dinámica del patrón (son estructuralmente estables).
  2. Calculamos la solución "outer" lejos de los centros de las espirales y el desarrollo "inner" cerca de cada uno de ellos.
  3. Linealizando en la zona "inner" encontraremos una condición de compatibilidad que determina la velocidad de los vórtices.

Ecuaciones del movimiento para los centros de las espirales: reducción de la EDP a un sistema de EDOs.

- Consideramos espirales con distancias de separación grandes, $1/\epsilon$, y con $n = \pm 1$.
- Hipótesis:
  1. Suponemos que las espirales se mueven despacio y que su movimiento define la dinámica del patrón (son estructuralmente estables).
  2. Calculamos la solución “outer” lejos de los centros de las espirales y el desarrollo “inner” cerca de cada uno de ellos.
  3. Linealizando en la zona “inner” encontraremos una condición de compatibilidad que determina la velocidad de los vórtices.

Interacción de las espirales

Notación



Interacción de espirales

Separación canónica

CASO GENERAL $q \neq 0$ PERO PEQUEÑO:

Con $\mathbf{X} = \epsilon \mathbf{x}$ y $T = \mu\epsilon^2 t$ y definiendo $\alpha = kq/\epsilon$ la ecuación queda

$$\epsilon^2 \mu \psi_T = \epsilon^2 \Delta\psi + (1 + iq)(1 - |\psi|^2)\psi - \frac{i\epsilon^2\alpha^2}{q}\psi$$

o alternativamente

$$\mu\epsilon^2 f_T = \epsilon^2 \Delta f - \epsilon^2 f|\nabla\chi|^2 + f(1 - f^2) \tag{1}$$

$$\mu\epsilon^2 f^2 \chi_T = \epsilon^2 \nabla \cdot (f^2 \nabla\chi) + qf^2(1 - f^2) - \frac{i\epsilon^2\alpha^2}{q} f^2 \tag{2}$$

Separación canónica: Suponemos que las espirales están separadas como $1/\epsilon$ de modo que

$$\frac{1}{\epsilon} = \mathcal{O}(1/qk), \quad \text{o equivalentemente} \quad \alpha = \frac{qk}{\epsilon} = \mathcal{O}(1).$$

Separación canónica

Zona "outer"

Ecuaciones dominantes

Escribimos $f = 1 + \epsilon^2 f_1$ y $\chi = \overline{\chi}/q$ y obtenemos para la fase

$$\mu \overline{\chi}_T = \Delta \overline{\chi} + |\nabla \overline{\chi}|^2 - \alpha^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Con el cambio $\overline{\chi} = \log h$ se convierte en lineal, $h_T = \Delta h - \alpha^2 h$. Escribiendo $h = h_0 + \mu h_1$ hallamos, en todo $\mathbb{R}^2$,

$$h = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(T) K_0(\alpha R_j) + \mu h_1,$$

donde β_j son de momento arbitrarias y se obtienen de las condiciones de matching cerca de los centros de las espirales.

Separación canónica

Zona "inner"

Cerca del vórtice ℓ, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_\ell(T) + \epsilon\mathbf{x}$, y desarrollando en ϵ como $\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}_0 + \epsilon\widehat{\Psi}_1$ la ecuacion dominante es

$$\mathcal{O}(\epsilon) = \Delta\widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_0(1 - |\widehat{\Psi}_0|^2),$$

con $\widehat{\Psi}_0 = \widehat{f}_0 e^{\widehat{\chi}_0}$

Linealización entorno a la solución dominante

$$-\mu\frac{d\mathbf{X}_\ell}{dT} \cdot \nabla\widehat{\psi}_0 = \Delta\widehat{\psi}_1 + (1 + iq)(\widehat{\psi}_1(1 - |\widehat{\psi}_0|^2) - \widehat{\psi}_0(\widehat{\psi}_0\widehat{\psi}_1^* + \widehat{\psi}_0^*\widehat{\psi}_1))$$

con $\widehat{\Psi}_1 = (\widehat{f}_1 + \widehat{f}_0\widehat{\chi}_1)e^{\widehat{\chi}_0}$

Esta es una ecuación lineal no homogénea de la que deducimos una condición de compatibilidad.

Separación canónica

Matching asintótico

Escribiendo la solución "outer" en términos de las variables "inner"

$$\chi = \frac{1}{q} \log \left(\beta_{\ell 0} K_0(\alpha \epsilon r) + G(\mathbf{X}_\ell) + \epsilon \mathbf{x} \cdot \nabla G(\mathbf{X}_\ell) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{\mu}{q} \chi_1$$

donde $G(\mathbf{X}) = \sum_{j \neq \ell}^{N} \beta_j(T) K_0(\alpha |\mathbf{X} - \mathbf{X}_j|)$.
Haciendo lo mismo con la "inner", escribiéndola en términos de las variables "outer", y comparando ambas expresiones se obtiene:

$$q \log \epsilon = -\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha = 2e^{c_1 - \gamma + G(\mathbf{X}_\ell)}.$$

Para dos espirales, cuando $|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|$ crece, α (y por lo tanto k) se convierte en el correspondiente a una única espiral.

Separación canónica

Ecuación del movimiento

De la condición de ortogonalidad sobre la linealización en la zona “inner” se llega a $\mu = \mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(1/|\log \epsilon|)$ y también:

Ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{X}_\ell}{dT} = -\frac{2qn_\ell}{\beta_\ell \mu} \nabla G^\perp(\mathbf{X}_\ell)$$

donde

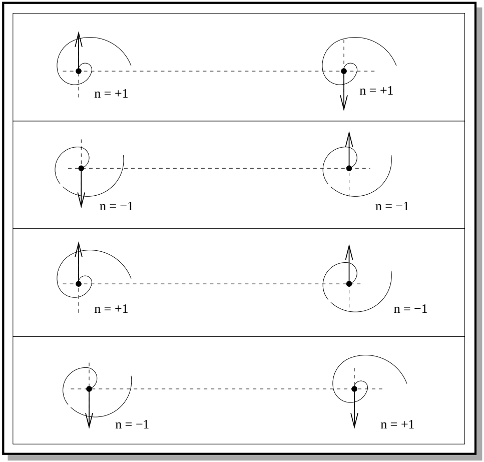
$$\nabla G^\perp(\mathbf{X}_\ell) = \sum_{j\neq\ell}^{N} \beta_j \alpha K_0'(\alpha|\mathbf{X}_\ell - \mathbf{X}_j|)\, \mathbf{e}_{\phi j\ell} + \mathcal{O}(\mu)$$

Con 2 espirales en las posiciones $(X_1, 0)$ y $(X_2, 0)$ con $X_1 < X_2$,

$$\frac{dX_1}{dT} \sim \left(0, -\frac{n_1 \pi}{X_2 - X_1}\right) \quad \text{cuando} \quad X_2 - X_1 \ll 1$$

Separación canónica

Dirección de la velocidad con dos espirales



Ecuación del movimiento para $q = 0$

Ejemplo con dos vórtices

Dos vórtices situados en $(X_1, 0)$ y $(X_2, 0)$, con $X_1 < X_2$ ([2]):

$$\frac{dX_1}{dT} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2}{X_1 - X_2}, 0\right) + \mathcal{O}(\mu)$$

- Cuando $n_1 \cdot n_2 = 1 \Rightarrow$ se repelen.
- Cuando $n_1 \cdot n_2 = -1 \Rightarrow$ se atraen.
- La interacción ocurre a lo largo de la línea que une los centros.

[2] J.C. Neu. *Vortices in complex scalar fields*. Phys. D, 43, 1990

Separación media

Ecuación del movimiento

Cuando α es pequeño,

Ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{X}_\ell}{dT} = \frac{2q}{\mu}\frac{\cos(qn_\ell|\log\epsilon|)}{\sin(qn_\ell|\log\epsilon|)}\sum_{j\neq\ell}^{N}\left(n_j\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}\mathbf{j}\ell}}{|X_\ell - X_j|}\right.$$
$$\left.+\,n_j\frac{\sin(qn_j|\log\epsilon|)}{\cos(qn_j|\log\epsilon|)}\frac{\mathbf{e}_{\phi\mathbf{j}\ell}}{|X_\ell - X_j|}\right) + \mathcal{O}(\mu)$$

$q = \mathcal{O}(\mu)$ y $q|\log\epsilon| < \pi/2$, luego $\mu = \mathcal{O}\big(1/|\log\epsilon|\big)$ y α de hecho se convierte en exponencialmente pequeño.

Separación media

Ecuación del movimiento

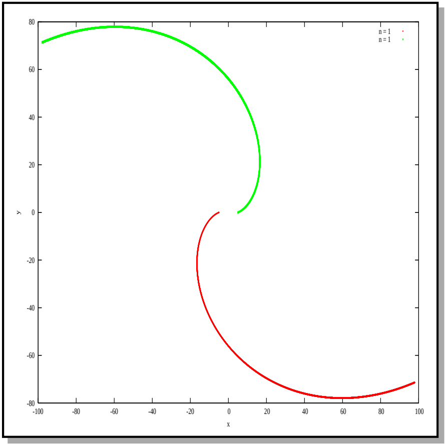
- Con 2 espirales en $(X_1, 0)$ y $(X_2, 0)$ con $X_1 < X_2$ y $n_1 = n_2 = \pm 1$,

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dT} = -2n_1 \frac{q}{\mu}\left(\frac{\cos(q|\log\epsilon|)}{\sin(q|\log\epsilon|)}\frac{n_2}{|X_2 - X_1|}, \frac{1}{|X_2 - X_1|}\right).$$

- Esta ecuación interpola entre el caso $q \to 0$ y $q|\log\epsilon| \to \pi/2$ (usando $q \to 0$, $\cos(q|\log\epsilon) \sim 1$ y $\sin(q|\log\epsilon|) \sim q|\log\epsilon|$).

Separación media

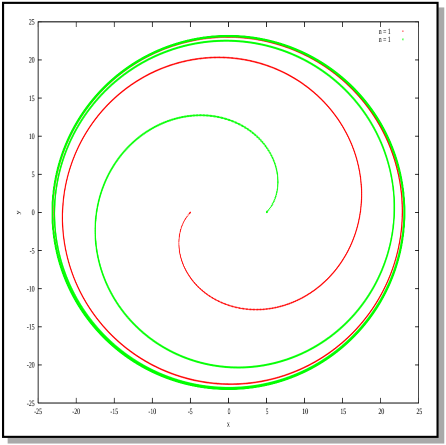
Dos espirales



Dos espirales con grado $+1$ para $q = 0{,}2$.

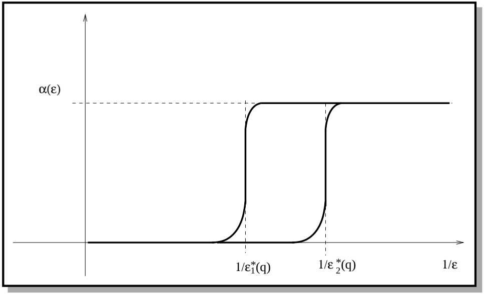
Separación media

Dos espirales



Dos espirales con grado $+1$ para $q = 0{,}5$.

El parámetro α como función de ϵ

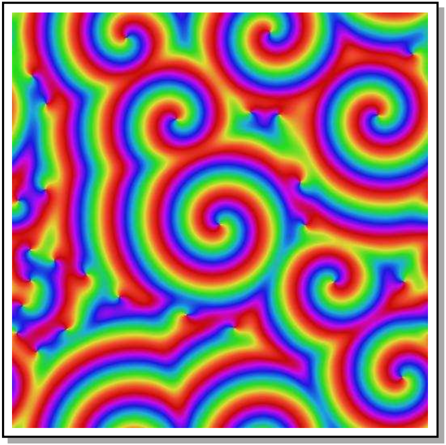


$\epsilon^\star(q)$ es el valor crítico a partir del cual empieza la zona canónica y que se define como

$$\epsilon^\star(q) = e^{-\pi/(2q)}.$$

Para valores mayores de q la distancia crítica $1/\epsilon^\star$ es menor.

Cuando q es de orden unidad



Simulación obtenida en *www - chaos.umd.edu/gallery/pattern.html*