22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)
www.dance-net.org/dd2008
dd2008@dance-net.org

Marco A. Fontelos

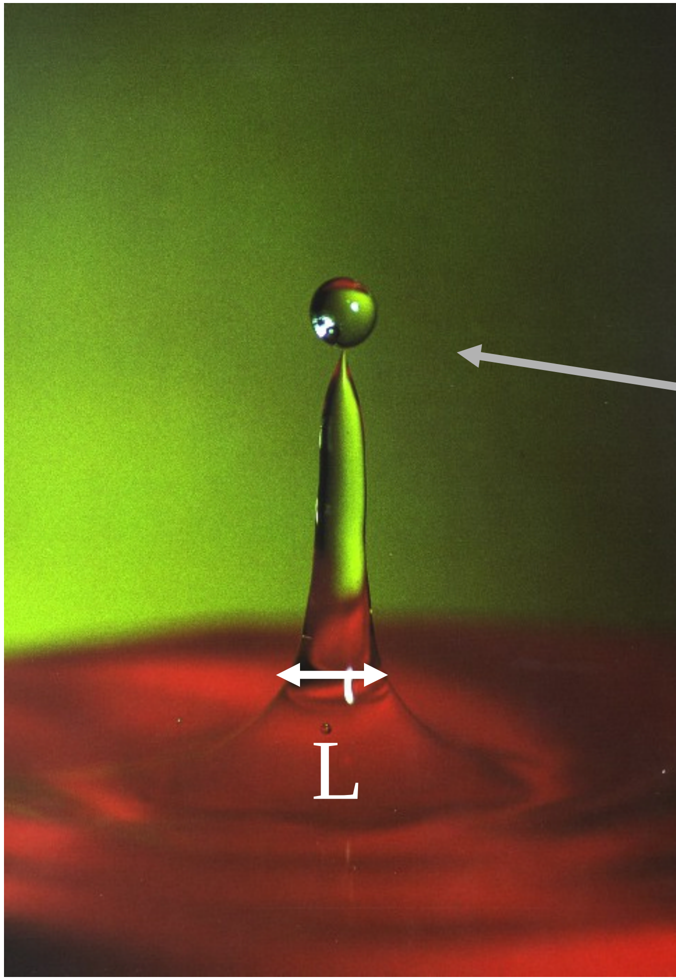
Sistemas dinámicos asociados a la formación de algunas singularidades en EDPs

…con Jens Eggers

CSIC

The role of self-similarity in singularities of PDE’s, Nonlinearity 2009

Invariancia de escala: **Leyes de Potencia**



Escalas de longitud y tiempo en la evolución separadas de la escala externa L

Invariancia de escala:

$$h_{\min} \propto (t_0 - t)^a$$

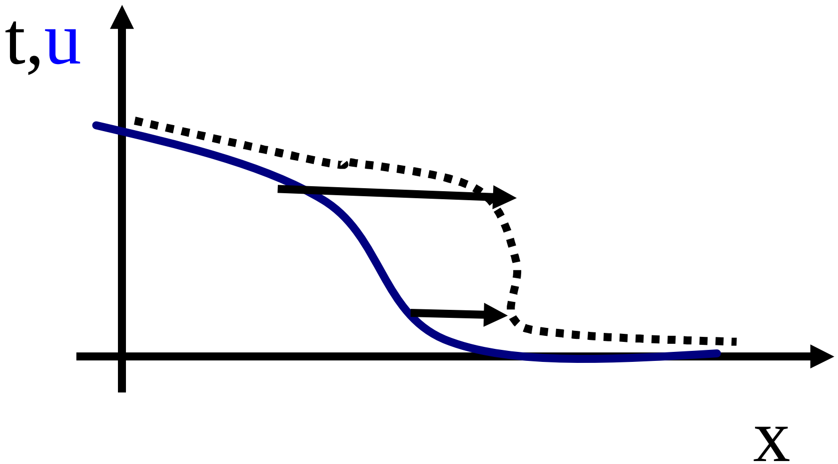
Una onda de choque

Curvas características:

$$z = u_0(x)t + x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

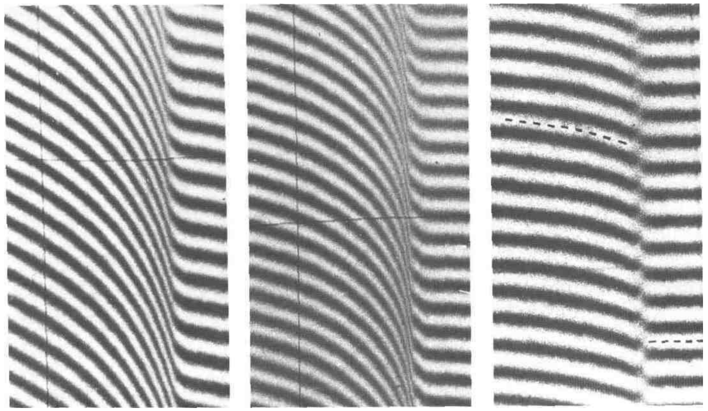
$$\boxed{u(z,t) = u_0(x)}$$



$$t_0 = Min_x\{-1/u_0'(x)\}$$

$$\frac{dz}{dx} = u_0'(x)t + 1 \overset{!}{=} 0$$

Tiempo de la singularidad



Solución de similaridad $t' = t_0 - t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u = t'^{a} U\left(\frac{x}{t'^{a+1}}\right) \quad x = x/t'^{a+1}$$

$$-aU + (1+a)xU' + UU' = 0$$

$$x = \begin{cases} -U - CU^{1+1/a}, \; a_{\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2i+2}, i = 0, 1, 2, \; \ldots \\ -U, \qquad a = 0 \end{cases}$$

regular en $x = 0$

Matching condition

$$t' = t_0 - t$$

$$u = t'^{a} U\left(\frac{x}{t'^{a+1}}\right) \quad \mathsf{x} = x/t'^{a+1}$$

$u(x > 0)$ finite!

as $t' \to 0$

tamaño región crítica: $\Delta x \sim t'^{a+1}$

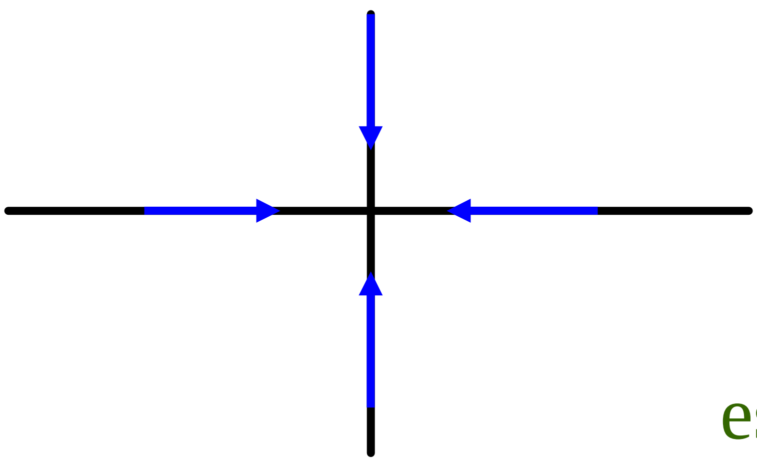
$$\boxed{\mathsf{x} = -U - CU^{1+1/a_i}, \;\; a_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2i+2}, i = 0, 1, 2, \ldots}$$

Aproximación a la sol. de similaridad

$$u = t'^{a} U(x,t) \quad \begin{cases} x = x/t'^{a+1} \\ t = -\ln t' \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

$$\boxed{U_t = aU - (1+a)xU' - UU'}$$



La solución de similaridad es un punto fijo!

estabilidad?

Punto fijo: estabilidad

$$\left.\begin{aligned} U(x,t) &= \bar{U}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) P_j(x) \\ (a_i - n) P - (1+a_i) x P' - P \bar{U}_i' - P' \bar{U}_i &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Problema de autovalores

autofunción

$$\boxed{P_j^{(i)} = \frac{\bar{U}_i^{\,3+2i-2n_j^{(i)}(i+1)}}{1+(2i+3)\bar{U}_i^{\,2i+2}}}$$

autovalores

$$n_j^{(i)} = \frac{2i+4-j}{2i+2}$$

Estado base $(i=0):\ n = 3/2, 1, 0, -1/2 \ldots$ estable!

$$\boxed{u(x,t) = t'^{1/2} U\left(x/t'^{3/2}\right)}$$

Un intento de clasificación

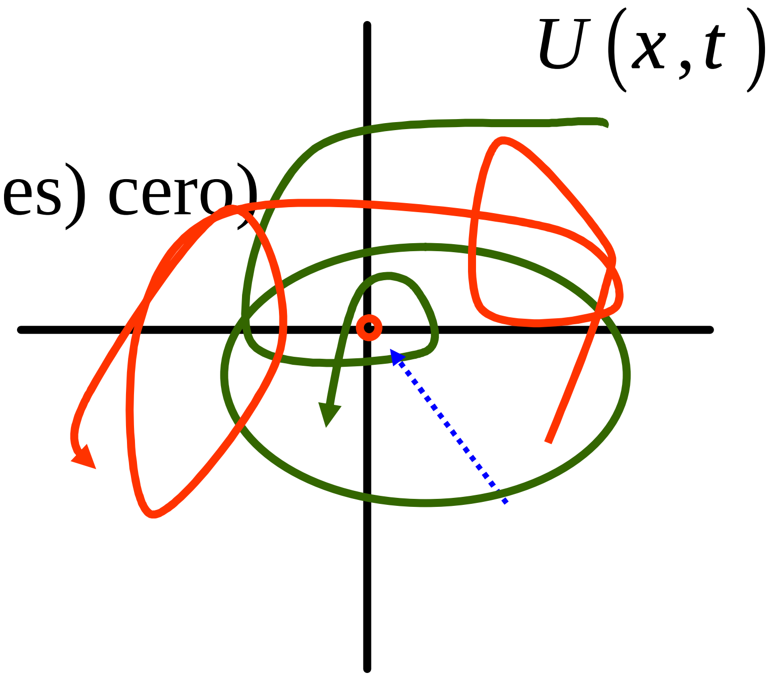
1) punto fijo estable

2) variedad centro (autovalor(es) cero)

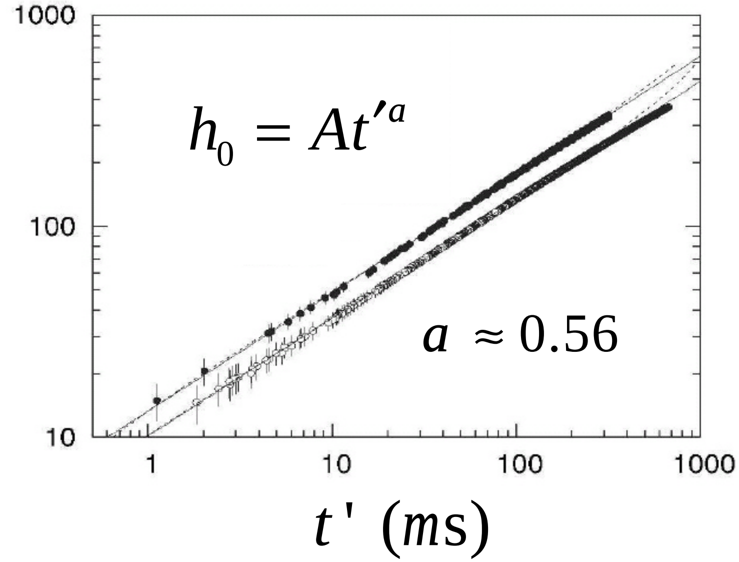
3) Ciclo límite

4) Atractor extraño

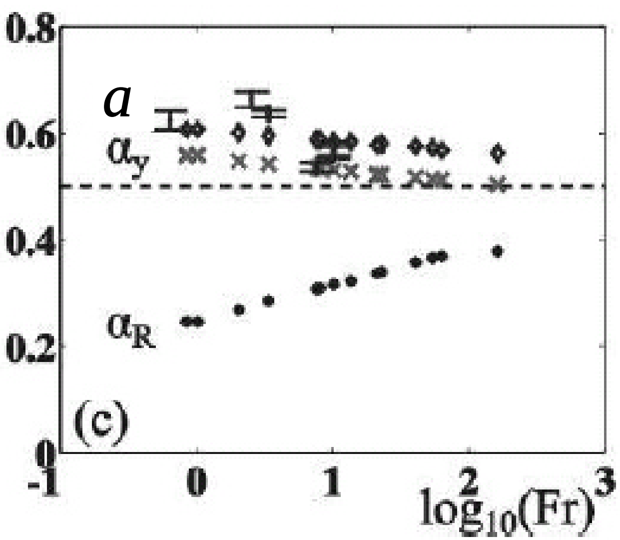
5) Singularidades múltiples



Variedad Centro: ruptura de burbujas



Keim et al. PRL `06



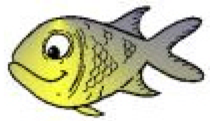
Bergmann et al. PRL `06

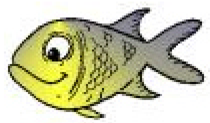
nuevo exponente de escala?

Compto. no-universal?

Cuerpos delgados

$$a \equiv h^2 \quad ;$$





$$\mathbf{u} = \nabla f$$

$$f = \int \frac{C(x)\,dx}{\sqrt{(z-x)^2 + r^2}}$$

$$\Delta f = 0$$

$$\text{for } \mathrm{v_r} \ll \mathrm{v_z}$$

$$\partial_t h \approx \mathrm{v_r}$$

$$\int_{-L}^{L} \frac{\ddot{a}(\xi,t)\,d\xi}{\sqrt{(z-\xi)^2 + a(z,t)}} = \frac{\dot{a}^2}{2a} + \cancel{4\Delta p/\rho},$$

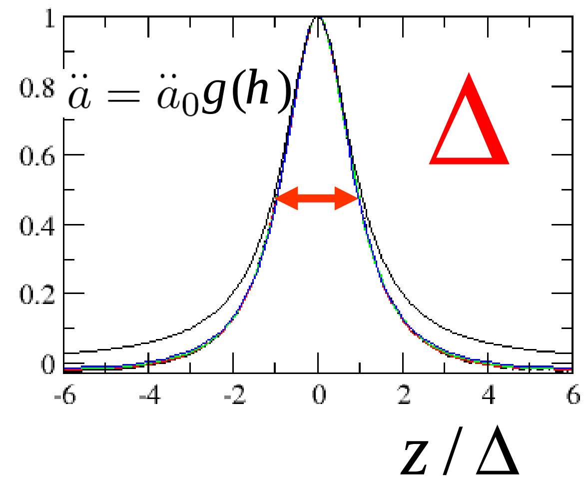
$$\Rightarrow \partial_t h^2 \approx -4C$$

tension superficial subdominante

Expansión

$$g(h)=\frac{1}{1+h^{2}},\ h=\frac{z}{\Delta}$$

cuerpo delgado: $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ddot{a}(\xi,t)\,d\xi}{\sqrt{(z-\xi)^2+a(z,t)}}=\frac{\dot{a}^2}{2a}.$$



$$a(z,t)=a_0\left(1+\frac{z^2}{\Delta^2}+O(z^4)\right)\quad \Delta=\sqrt{2a_0/a_0''}$$

en z=0: $$\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\ddot{a}(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2+a_0}}\approx\ddot{a}_0\ln\frac{4\Delta^2}{a_0}=\frac{\dot{a}_0^2}{2a_0}$$

$$(lhs)''=(rhs)''\qquad \ddot{a}_0''\ln\left(\frac{8}{e^3a_0''}\right)-2\frac{\ddot{a}_0a_0''}{a_0}=\frac{\dot{a}_0\dot{a}_0''}{a_0}-\frac{\dot{a}_0^2a_0''}{2a_0^2}.$$

Punto fijo: marginal

defino: $$2a = -(\ln a_0)_t \qquad 2d = -\left(\ln \frac{a_0}{\Delta^2}\right)_t$$

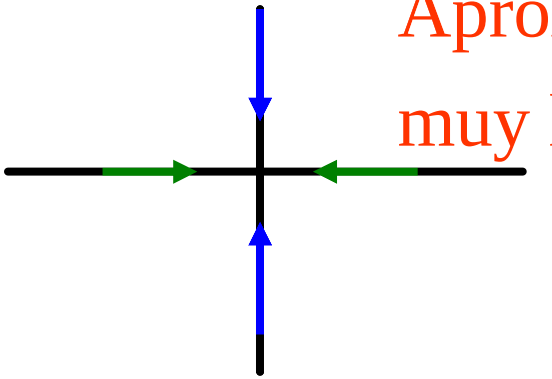
$$t = -\ln(t_0 - t)$$

linearizo: $$a = \boxed{\frac{1}{2}} + u(t), \qquad d = \mathrm{v}(t)$$

$$u_t = u - \mathrm{v} \qquad \mathrm{v}_t = -8\mathrm{v}^3$$

$$a = 1/2 + \frac{1}{4\sqrt{t}} + \ldots$$

$$d = \frac{1}{4\sqrt{t}} + \ldots$$



Aproximación muy lenta!

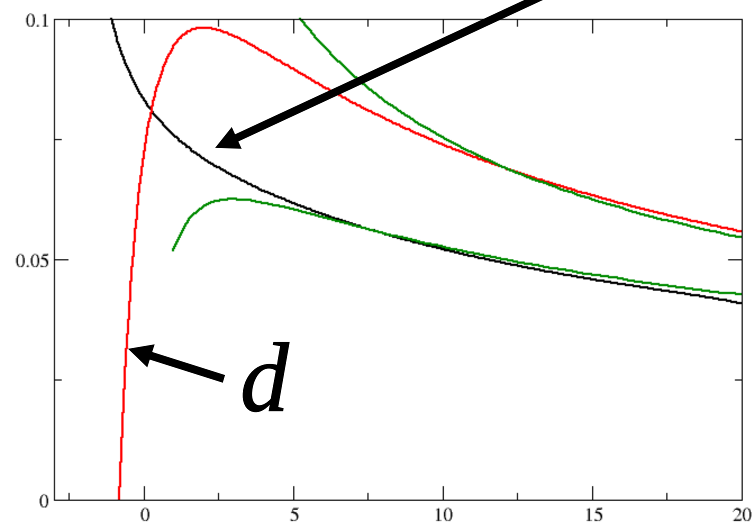
Los exponentes

t_0 depende de condiciones initiales

$$a = 1/2 + \frac{1}{4\sqrt{t+t_0}} + \frac{1}{4(t+t_0)}$$

$$d = \frac{1}{4\sqrt{t+t_0}}$$

$a - 1/2$



d

t

- exponente "anómalo"

  $a > 1/2$

- a depende de condiciones iniciales

J. Eggers, MAF, D. Leppinen, J. Snoeijer, PRL 2007

Otro ejemplo: Schrödinger NL

$$\boxed{i\varphi_t + \varphi_{xx} + |\varphi|^4 \varphi = 0.}$$

Ansatz $\quad \varphi(x,t) = e^{i\mu(t) - i\beta(t)z^2/4} \lambda^{\frac{1}{2}}(t) \varphi_a(z), \quad z = \lambda(t)x$

con $\quad -\varphi_a'' + \varphi_a - \frac{1}{4} a z^2 \varphi_a - |\varphi_a|^4 \varphi_a = 0$

$$\begin{cases} \mu_t & = \lambda^2 \\ \lambda^{-3}\lambda_t & = \beta \\ \beta_t + \lambda^2\beta^2 & = \lambda^2 h^2 \\ h_t & = -c\lambda^2 e^{-S_0/h}/h. \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x,t) \sim e^{-i\tau \ln \tau} \frac{(\ln \tau)^{\frac{1}{4}}}{t'^{\frac{1}{4}}} \varphi_0 \left(\frac{(\ln \tau)^{\frac{1}{2}}}{t'^{\frac{1}{2}}} x \right)}$$

Zakharov

Ciclo límite: cosmología

…una versión supersimplificada:

$$u_t\left(x,t\right)=2f\mathrm{v},\ \mathrm{v}_t\left(x,t\right)=2fu$$

$$f_t(x,t)=f^2$$

auto-similaridad:

$$u=U(x,t)$$

$$\mathrm{v}=V(x,t)$$

$$f=t'^{-1}F(x,t)$$

$$x=\frac{x}{t'^{1/2}}$$

$$U_t=-xU_x/2+FV$$

$$V_t=-xV_x/2-FV$$

$$F_t=-F-xF_x/2+F^2$$

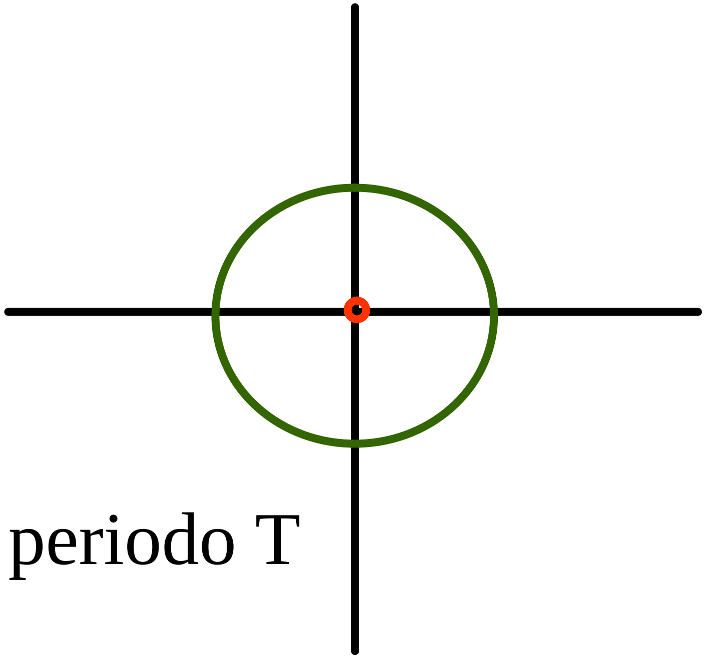
Autosimilaridad discreta

$$U_t = -xU_x/2 + FV$$
$$V_t = -xV_x/2 - FV$$
$$F_t = -F - xF_x/2 + F^2$$

$$F = \frac{1}{1+cx^2}$$

$$U = U_0 \sin(C(x)+t),$$
$$V = U_0 \cos(C(x)+t)$$

$$C(x) = -\ln\left(1+cx^2\right)$$

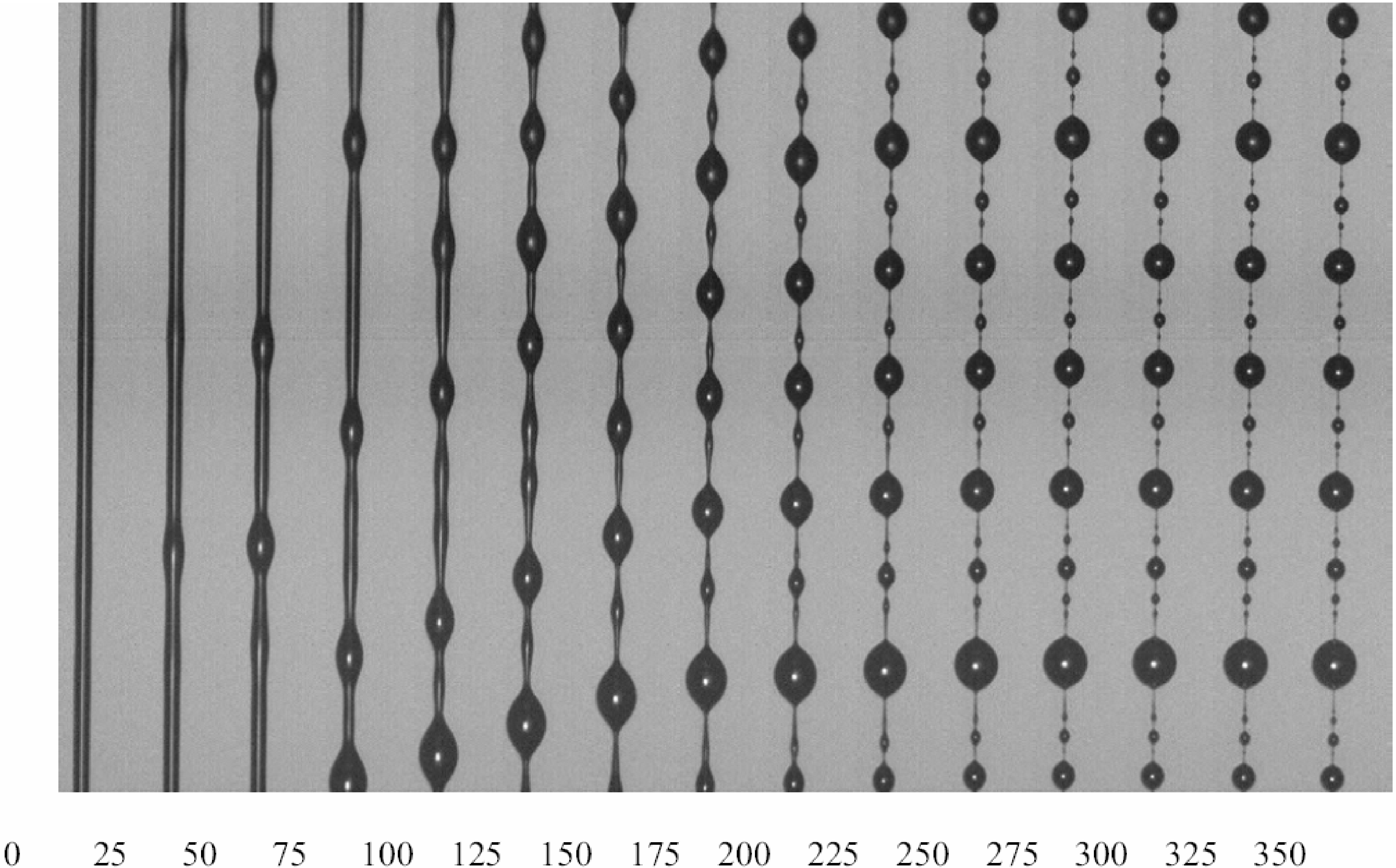


periodo T

en $t = t_0 + nT$

el sistema parece autosimilar

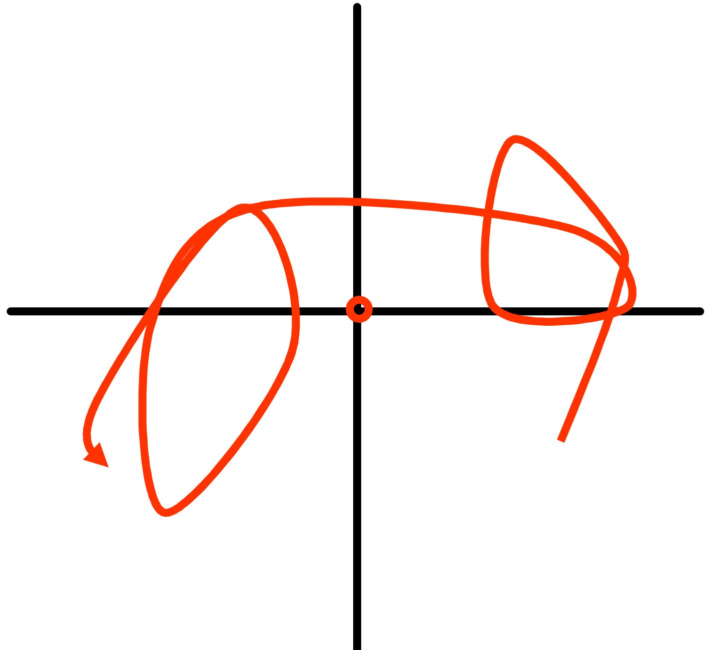
Un posible ejemplo: filamentos de fluídos poliméricos



Caos

$$u_t^{(i)} = 2\, f F_i\left(\left\{u^{(i)}\right\}\right),\ i = 1, \dots\ n \qquad f_t = f^2$$

$$\left.\begin{aligned} u^{(i)} &= U^{(i)}\left(C(x)+t, x\right) \\ C(x) &= -\ln\left(1+cx^2\right) \end{aligned}\right\} \quad U_t^{(i)} = F_i\left\{U^{(i)}\right\}$$



$$F_1 = s\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right)$$

$$F_2 = r u^{(1)} - u^{(2)} - u^{(1)} u^{(3)}$$

$$F_3 = u^{(1)} u^{(2)} - b u^{(3)}$$

Un catálogo de singularidades

Cada singularidad está caracterizada por un sist. dinámico de dimensión baja en una escala logarítmica de tiempo

$$u_t = -u$$ Estable

$$u_t = -u^a$$ Variedad centro

$$u_t = \Omega \mathrm{v}, \; \mathrm{v}_t = -\Omega u$$ Ciclo límite

$$u_t = s\,(\mathrm{v} - u), \; \mathrm{v}_t = r\,u - \mathrm{v} - uw, \; \mathrm{w}_t = u\mathrm{v} - b\,w$$

Caótico

con Jens Eggers

Problemas abiertos

(i) Papel de la “geometría” i.e. Teoría de catástrofes

(ii) Sistemas físicos que exhiban comportamientos dinámicos más exóticos? Bifurcación?

(iii) Hay algún sistema caótico?

(singularidades en Euler?)

(iv) Singulardades múltiples (Hele-Shaw)