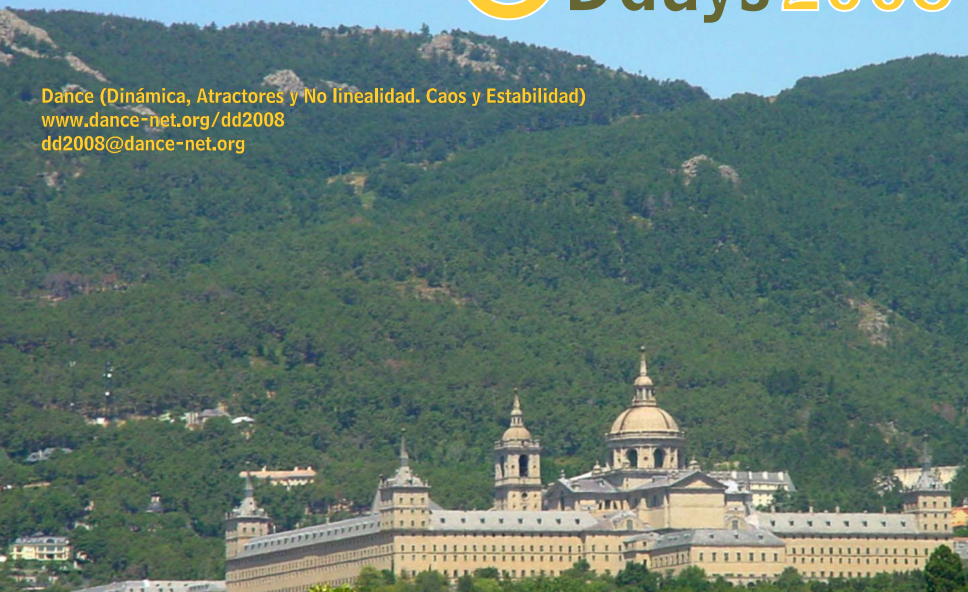
22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

Ddays2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)
www.dance-net.org/dd2008
dd2008@dance-net.org



Comportamiento de algunos integradores numéricos en largos intervalos de tiempo

Ddays – El Escorial 2008

M. Calvo, P. Laburta,
J.I. Montijano and L. Rández

IUMA – Zaragoza (Spain)

Introducción

- Estudio de sistemas dinámicos $\longrightarrow$ métodos numéricos.

Introducción

- Estudio de sistemas dinámicos $\longrightarrow$ métodos numéricos.
- Métodos numéricos $\longrightarrow$ Min. error + Min coste computacional.

Introducción

- Estudio de sistemas dinámicos $\longrightarrow$ métodos numéricos.
- Métodos numéricos $\longrightarrow$ Min. error + Min coste computacional.
- El estudio en largos intervalos de tiempo requiere además que el método numérico reproduzca las propiedades del flujo.
  - Simplecticidad (systemas Hamiltonianos),
  - Reversibilidad,
  - Invariantes,
  - Isospectralidad,
  - Ortogonalidad,
  - $\ldots$

Introducción

- Estudio de sistemas dinámicos $\longrightarrow$ métodos numéricos.
- Métodos numéricos $\longrightarrow$ Min. error + Min coste computacional.
- El estudio en largos intervalos de tiempo requiere además que el método numérico reproduzca las propiedades del flujo.
  - Simplecticidad (systemas Hamiltonianos),
  - Reversibilidad,
  - Invariantes,
  - Isospectralidad,
  - Ortogonalidad,
  - $\ldots$

Integración geométrica

Notaciones

- ODE $\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ Solución: $\varphi(t; y_0)$
  Flujo exacto: $\varphi_t(u) = \varphi(t; u)$

Notaciones

- ODE $\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ Solución: $\varphi(t; y_0)$
  Flujo exacto: $\varphi_t(u) = \varphi(t; u)$

- Método de un paso
  $\psi_h(y) \simeq \varphi_h(y), \quad y_n = \psi_{h_n}(y_{n-1}) \simeq \varphi_{t_n}(y_0)$

Notaciones

- ODE $\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ Solución: $\varphi(t; y_0)$
  Flujo exacto: $\varphi_t(u) = \varphi(t; u)$

- Método de un paso
  $\psi_h(y) \simeq \varphi_h(y), \quad y_n = \psi_{h_n}(y_{n-1}) \simeq \varphi_{t_n}(y_0)$

- Error global $\text{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Notaciones

- ODE $\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ Solución: $\varphi(t; y_0)$
  Flujo exacto: $\varphi_t(u) = \varphi(t; u)$

- Método de un paso
  $\psi_h(y) \simeq \varphi_h(y), \quad y_n = \psi_{h_n}(y_{n-1}) \simeq \varphi_{t_n}(y_0)$

- Error global $\quad \mathrm{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

- Orden r, paso de integración h:

$$\psi_h(y) - \varphi_h(y) = \mathcal{O}(h^{r+1})$$
$$ge(t_n) = \mathcal{O}(h^r)$$

Métodos numéricos

- **Métodos simplécticos.** Sanz–Serna, ...
  - Conservan la forma simpléctica.
  - Error $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ acotado (sólo con paso fijo).
  - Existen explícitos para hamiltonianos separables.
  - Han de ser implícitos para hamiltonianos generales.
    - Conservan integrales primeras cuadráticas $y_n^T Q y_n = y_0^T Q y_0$

Métodos numéricos

- **Métodos simplécticos.** Sanz–Serna, ...
  - Conservan la forma simpléctica.
  - Error $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ acotado (sólo con paso fijo).
  - Existen explícitos para hamiltonianos separables.
  - Han de ser implícitos para hamiltonianos generales.
    - Conservan integrales primeras cuadráticas $y_n^T Q y_n = y_0^T Q y_0$
- **Métodos pseudo-simplécticos.** Aubry–Chartier, Calvo et al.
  - Explícitos.
  - Conservan la forma simpléctica hasta orden $s \gtrsim 2r$.
  - Conservan integrales primeras cuadráticas hasta orden $s \gtrsim 2r$.

Métodos numéricos

- **Métodos simplécticos.** Sanz–Serna, ...
  - Conservan la forma simpléctica.
  - Error $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ acotado (sólo con paso fijo).
  - Existen explícitos para hamiltonianos separables.
  - Han de ser implícitos para hamiltonianos generales.
    - Conservan integrales primeras cuadráticas $y_n^T Q y_n = y_0^T Q y_0$
- **Métodos pseudo-simplécticos.** Aubry–Chartier, Calvo et al.
  - Explícitos.
  - Conservan la forma simpléctica hasta orden $s \gtrsim 2r$.
  - Conservan integrales primeras cuadráticas hasta orden $s \gtrsim 2r$.
- **Métodos *Ad hoc*.**
  - Métodos en grupos de Lie, Métodos que conservan la energía, ...
  - Métodos de proyección $\bar{y}_{n+1} = y_{n+1} + w_n \lambda_n$
    - Conservan invariantes $G(\bar{y}_{n+1}) = G(y_0)$

Métodos numéricos

- **Métodos simplécticos.** Sanz–Serna, ...
  - Conservan la forma simpléctica.
  - Error $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ acotado (sólo con paso fijo).
  - Existen explícitos para hamiltonianos separables.
  - Han de ser implícitos para hamiltonianos generales.
    - Conservan integrales primeras cuadráticas $y_n^T Q y_n = y_0^T Q y_0$
- **Métodos pseudo-simplécticos.** Aubry–Chartier, Calvo et al.
  - Explícitos.
  - Conservan la forma simpléctica hasta orden $s \gtrsim 2r$.
  - Conservan integrales primeras cuadráticas hasta orden $s \gtrsim 2r$.
- **Métodos *Ad hoc*.**
  - Métodos en grupos de Lie, Métodos que conservan la energía, ...
  - Métodos de proyección $\bar{y}_{n+1} = y_{n+1} + w_n \lambda_n$
    - Conservan invariantes $G(\bar{y}_{n+1}) = G(y_0)$
- **Métodos explícitos**

Métodos numéricos

- Método simpléctico: Gauss de orden 4
  - Implícito.
  - Simpléctico.
  - Simétrico.
- Métodos pseudo-simpléctico: Gauss, $s = 8$, $r = 4$.
  - Conserva la forma simpléctica hasta orden 8.
  - Conserva integrales primeras cuadráticas hasta orden 8.
- Método explícito: DOPRI 5(4).
- Métodos de proyección: DOPRI 5(4) $\bar{y}_{n+1} = y_{n+1} + v_n \lambda_n$

¿Errores globales en largos intervalos de tiempo?

¿Errores en invariantes en largos intervalos de tiempo?

Primer problema test

Problema de Kepler plano

$$p_i' = -\frac{q_i}{(q_1^2+q_2^2)^{3/2}}, \; q_i' = p_i, \; i = 1,2$$

$$p_1 = 0, \; p_2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \; q_1 = 1-e, \; q_2 = 0, \quad e = 0.3$$

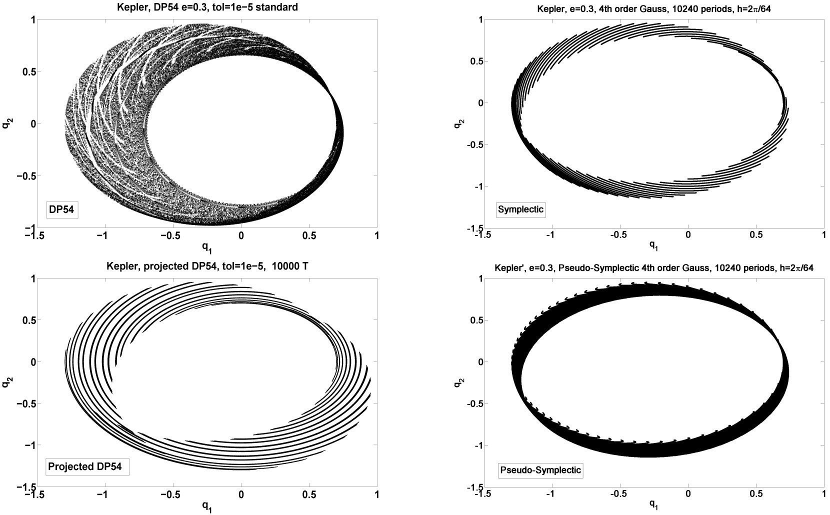
- Hamiltoniano

  $$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}$$

- Dos integrales primeras
  - Energía: H
  - Momento angular: $M = q_1 p_2 - q_2 p_1.$
- Soluciones periódicas

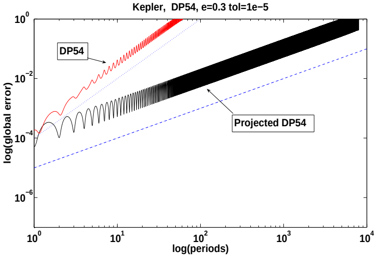
Problema de Kepler

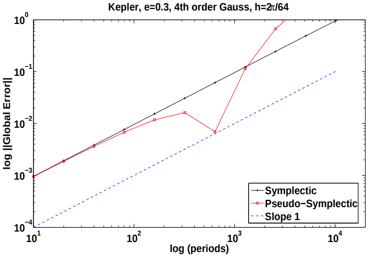
Órbitas numéricas, $t \in [0, 2\pi \times 10^4]$



Problema de Kepler

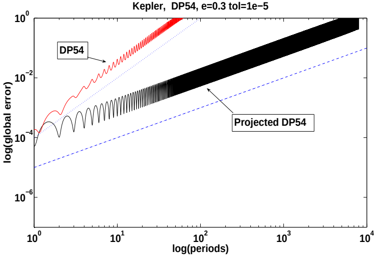
Error global

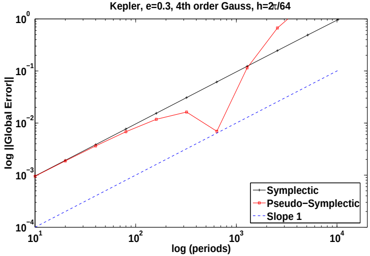




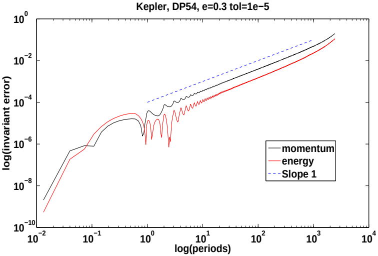
Problema de Kepler

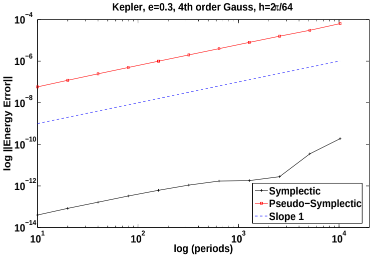
Error global





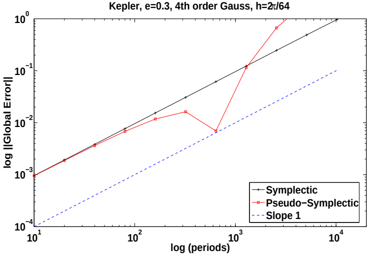
Error en los invariantes

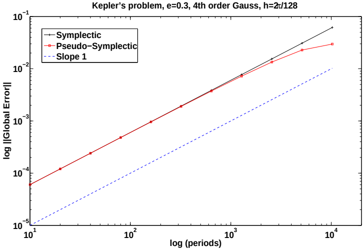




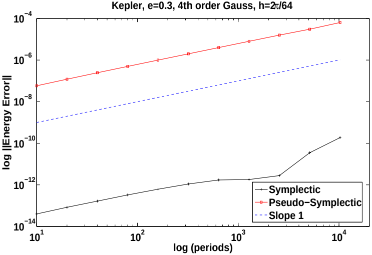
Problema de Kepler

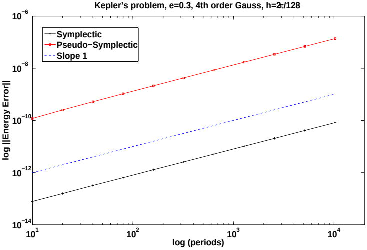
Error global, $h = T/64$ $\qquad$ $h = T/128$





Error en los invariantes, $h = T/64$ $\qquad$ $h = T/128$





Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, M.P. Calvo):

Sistema hamiltoniano + Método simpléctico, paso fijo

- $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ indep. de t

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, M.P. Calvo):

Sistema hamiltoniano + Método simpléctico, paso fijo

- $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ indep. de t

Soluciones periódicas

- $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r}) \quad y_\nu \simeq y(t_0 + T)$

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, M.P. Calvo):

Sistema hamiltoniano + Método simpléctico, paso fijo

- $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ indep. de t

Soluciones periódicas

- $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r}) \quad y_\nu \simeq y(t_0 + T)$

Problema de Kepler

- $T = T(H(y_0))$

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, M.P. Calvo):

Sistema hamiltoniano + Método simpléctico, paso fijo

- $H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^r)$ indep. de t

Soluciones periódicas

- $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $y_\nu \simeq y(t_0 + T)$

Problema de Kepler

- $T = T(H(y_0))$

$$ge(NT) = Nge(T) + \mathcal{O}(h^{2r})$$

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, B. Cano):

- Método de un paso "estandard" con flujo ψ_h
  - ψ_h bien definido $\forall h \leq h_0$
  - ψ_h regular con respecto a y y h.
  - ψ_h consistente de orden r.
  - $\psi'_h(y) - \varphi'_h(y) = \mathcal{O}(h^r)$
  - Con paso variable $h_n = h\, s(y_n, h), \quad s_{\min} \leq s(y,h) \leq s_{\max}$.
- Problema con soluciones periódicas

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, B. Cano):

- Método de un paso “estandard” con flujo ψ_h
  - ψ_h bien definido $\forall h \leq h_0$
  - ψ_h regular con respecto a y y h.
  - ψ_h consistente de orden r.
  - $\psi'_h(y) - \varphi'_h(y) = \mathcal{O}(h^r)$
  - Con paso variable $h_n = h\ s(y_n, h), \quad s_{\min} \leq s(y,h) \leq s_{\max}$.
- Problema con soluciones periódicas

$$ge(t) = h^r e_r(t) + h^{r+1} e_{r+1}(t) + \ldots + \text{ resto}$$

$$e_k(NT) = \sum_{j=0}^{N-1} M(T,0)^j e_k(T), \quad e_k(t) \in \mathbb{R}^m$$

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, B. Cano):

- Método de un paso “estandard” con flujo ψ_h
  - ψ_h bien definido $\forall h \leq h_0$
  - ψ_h regular con respecto a y y h.
  - ψ_h consistente de orden r.
  - $\psi'_h(y) - \varphi'_h(y) = \mathcal{O}(h^r)$
  - Con paso variable $h_n = h\, s(y_n, h), \quad s_{\min} \leq s(y,h) \leq s_{\max}$.
- Problema con soluciones periódicas

$$ge(t) = h^r e_r(t) + h^{r+1} e_{r+1}(t) + \ldots + \text{ resto}$$

$$e_k(NT) = \sum_{j=0}^{N-1} M(T,0)^j e_k(T), \quad e_k(t) \in \mathbb{R}^m$$

Problema de Kepler

Soporte teórico

Justificación del crecimiento lineal (J.M. Sanz–Serna, B. Cano):

- Método de un paso "estandard" con flujo ψ_h
  - ψ_h bien definido $\forall h \leq h_0$
  - ψ_h regular con respecto a y y h.
  - ψ_h consistente de orden r.
  - $\psi'_h(y) - \varphi'_h(y) = \mathcal{O}(h^r)$
  - Con paso variable $h_n = h\ s(y_n, h), \quad s_{\min} \leq s(y,h) \leq s_{\max}$.
- Problema con soluciones periódicas

$$ge(t) = h^r e_r(t) + h^{r+1} e_{r+1}(t) + \ldots + \text{ resto}$$

$$e_k(NT) = \sum_{j=0}^{N-1} M(T,0)^j e_k(T), \quad e_k(t) \in \mathbb{R}^m$$

Problema de Kepler

- Casi conservación del Hamiltoniano $\Rightarrow ge(NT) \simeq N ge(T)$

Segundo problema test

Lotka–Volterra

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ -uv & 0 \end{pmatrix} \nabla H(u,v) = \begin{pmatrix} u(v-2) \\ v(1-u) \end{pmatrix}$$

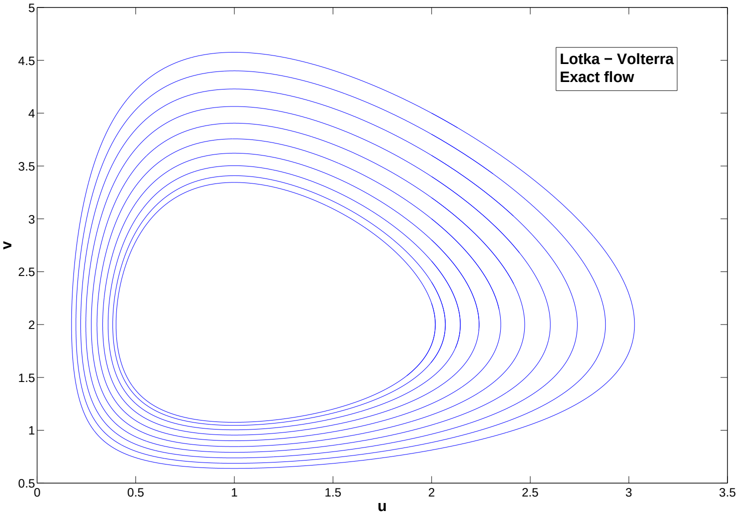
$$u = 1, \quad v = 1$$

- No Hamiltoniano, Poisson
- Integral primera:

$$G(u,v) = H(u,v) = -\log u + u - 2\log v + v$$

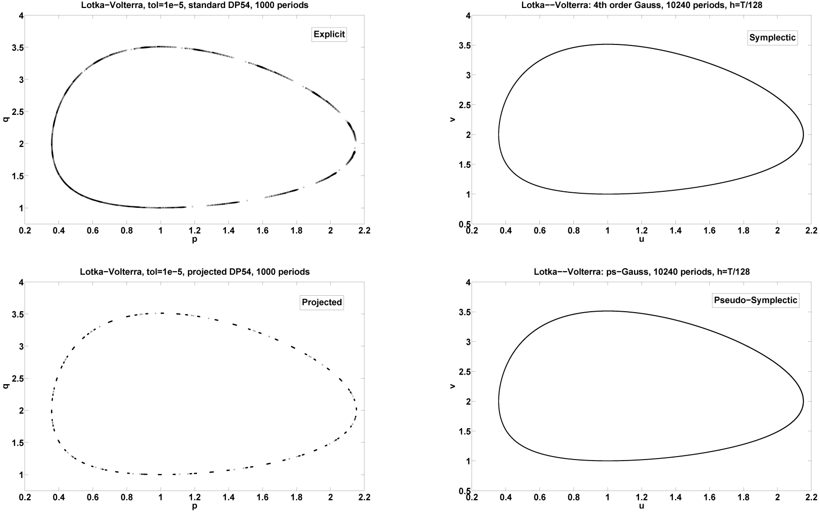
- Soluciones periódicas

Modelo de Lotka–Volterra



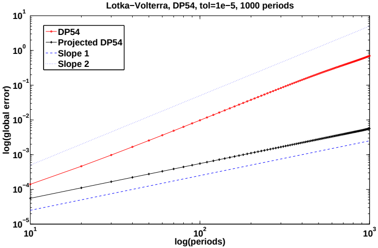
Modelo de Lotka–Volterra

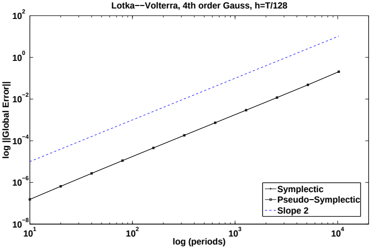
Órbitas numéricas



Modelo de Lotka–Volterra

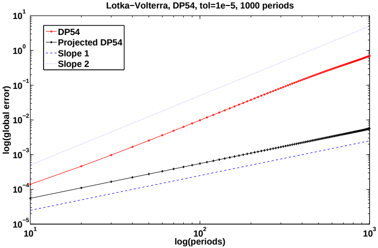
Error global

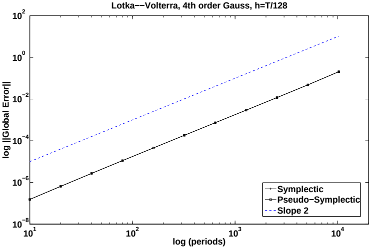




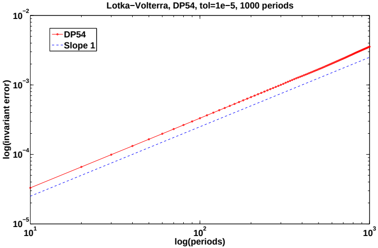
Modelo de Lotka–Volterra

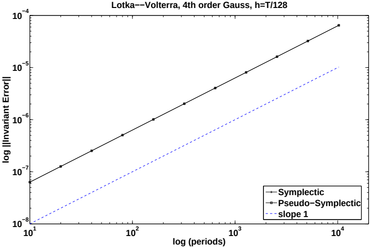
Error global





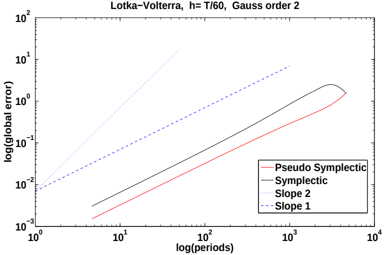
Error en el invariante



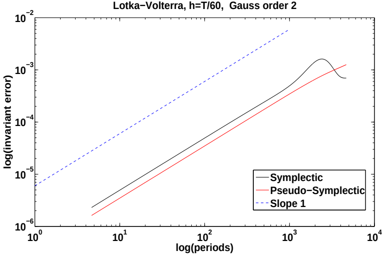


Modelo de Lotka–Volterra, orden 2

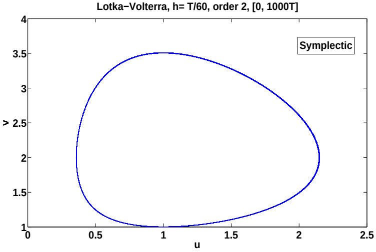
Error global

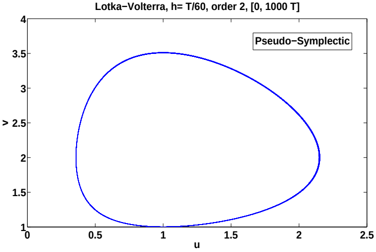


Error en invariante



Orbitas





Tercer problema test

Lotka–Volterra modificado

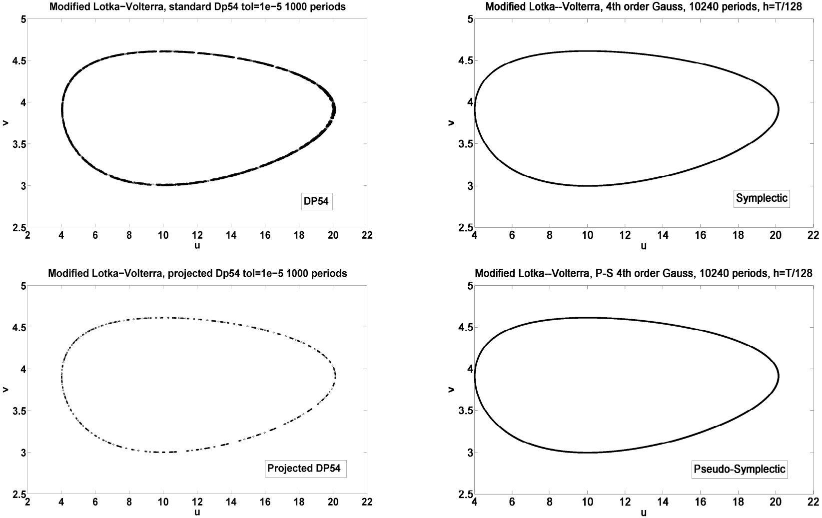
$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & uv \\ -uv & 0 \end{pmatrix} \nabla H(u,v) = \begin{pmatrix} -uv(e^v - 50)/50 \\ v(u/10 - 1) \end{pmatrix}$$

- No Hamiltoniano, Poisson
- Integral primera:

$$G(u,v) = H(u,v) = -u/10 + \log u + v - e^v/50$$

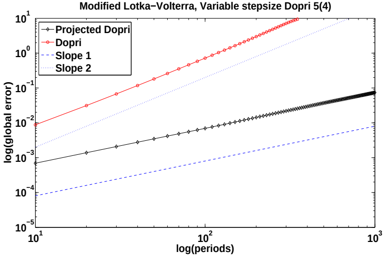
- Soluciones periódicas

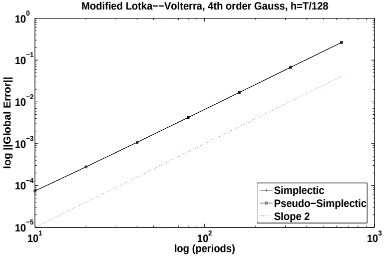
Órbitas numéricas



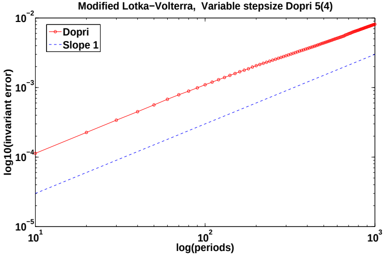
Lotka–Volterra modificado

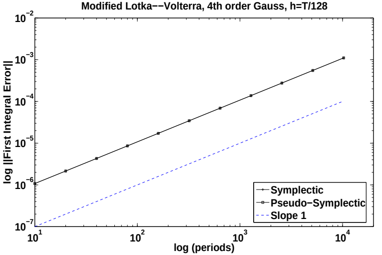
Error global





Error en el invariante





Recopilando resultados

- **Crecimiento lineal del error de los invariantes en todos los casos.**

Recopilando resultados

- Crecimiento lineal del error de los invariantes en todos los casos.
- Crecimiento del error global según la tabla:

Recopilando resultados

- **Crecimiento lineal del error de los invariantes en todos los casos.**
- **Crecimiento del error global según la tabla:**

	DP54				G. $r = 4$		$r = 2$	
	DP54	Proy. en H	Proy. en L	Proy. en H, L	Gauss-4	Gauss-PS	Gauss-2	PSymp-2
Kepler	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si
L–V	No	Si	–	–	No	No	Si	Si
L–V Mod	No	Si	–	–	No	No	No	No

Recopilando resultados

- **Crecimiento lineal del error de los invariantes en todos los casos.**
- **Crecimiento del error global según la tabla:**

	DP54				G. $r=4$		$r=2$	
	DP54	Proy. en H	Proy. en L	Proy. en H, L	Gauss-4	Gauss-PS	Gauss-2	PSymp-2
Kepler	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si
L–V	No	Si	–	–	No	No	Si	Si
L–V Mod	No	Si	–	–	No	No	No	No

Explicación teórica

Crecimiento del error global

- Error global $\quad \mathrm{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Explicación teórica

Crecimiento del error global

- Error global $\mathrm{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Resultado:

- Problemas generales (no necesariamente Hamiltonianos) tales que la solución $\varphi_t(u)$ es periódica con periodo $T = T(u)$, regular, para todo u en un entorno de y_0.

Explicación teórica

Crecimiento del error global

- Error global $\quad \text{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Resultado:

- Problemas generales (no necesariamente Hamiltonianos) tales que la solución $\varphi_t(u)$ es periódica con periodo $T = T(u)$, regular, para todo u en un entorno de y_0.

$$\text{ge}(NT_0) = N\,\text{ge}(T_0) - \frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\nabla T(y_0)^T \text{ge}(T_0) + \mathcal{O}(N^2 h^{2r-1} R(T_0, h)) + h^{2r-1} R(NT_0, h)$$

Explicación teórica

Crecimiento del error global

- Error global $\quad \mathrm{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Resultado:

- Problemas generales (no necesariamente Hamiltonianos) tales que la solución $\varphi_t(u)$ es periódica con periodo $T = T(u)$, regular, para todo u en un entorno de y_0.

$$\mathrm{ge}(NT_0) = \boxed{N\,\mathrm{ge}(T_0)} - \frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\nabla T(y_0)^T \mathrm{ge}(T_0) + \mathcal{O}(N^2 h^{2r-1} R(T_0, h)) + h^{2r-1} R(NT_0, h)$$

Explicación teórica

Crecimiento del error global

- Error global $\quad \text{ge}(t_n) = y_n - y(t_n) = y_n - \varphi(t_n; y_0)$

Resultado:

- Problemas generales (no necesariamente Hamiltonianos) tales que la solución $\varphi_t(u)$ es periódica con periodo $T = T(u)$, regular, para todo u en un entorno de y_0.

$$\text{ge}(NT_0) = N\,\text{ge}(T_0) - \boxed{\frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\nabla T(y_0)^T \text{ge}(T_0)} + \mathcal{O}(N^2 h^{2r-1} R(T_0, h)) + h^{2r-1} R(NT_0, h)$$

Explicación teórica

Crecimiento del error global

$$\text{ge}(NT_0) = N\ \text{ge}(T_0) - \frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\ \boxed{\nabla T(y_0)^T \text{ge}(T_0)} + \mathcal{O}(N^2 h^{2r-1} R(T_0,h)) + h^{2r-1} R(NT_0,h)$$

Explicación teórica

Crecimiento del error global

$$\text{ge}(NT_0) = N\ \text{ge}(T_0) - \frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\ \nabla T(y_0)^T \text{ge}(T_0) + \mathcal{O}(N^2 h^{2r-1} R(T_0,h)) + h^{2r-1} R(NT_0,h)$$

Aplicación:

Si $T = T(G_1(u), G_2(u), \ldots)$, G_i integrales primeras

- Si el método conserva las integrales $G_i(y_n) = G_i(y_0)$

  ó
- Si el método es tal que $\nabla G_i(y_0)^T ge(T_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$

Crecimiento del error global lineal.

Explicación teórica

Error en los invariantes

Suponemos una integral primera

$$G(y(t)) = \text{cte} \Rightarrow \nabla G(y(t))^T f(y(t)) = 0 \quad \forall y_0$$

Explicación teórica

Error en los invariantes

Suponemos una integral primera

$$G(y(t)) = \text{cte} \Rightarrow \nabla G(y(t))^T f(y(t)) = 0 \quad \forall y_0$$

Resultado:

Error en el invariante tras N periodos
$\Delta^{(N)}G = G(y_{N\nu}) - G(y_0),\ N = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\Delta^{(N)}G = N\ \nabla G(y_0)^T ge(T_0)\ &+ h^{2r-1} N \nabla G(y_0)^T R(T_0, h) \\ &+ h^{2r-1} \nabla G(y_0)^T R(NT_0, h) + \mathcal{O}\left(\|ge(NT_0)\|^2\right)\end{aligned}$$

Explicación teórica

Error en los invariantes

Suponemos una integral primera

$$G(y(t)) = \text{cte} \Rightarrow \nabla G(y(t))^T f(y(t)) = 0 \quad \forall y_0$$

Resultado:

Error en el invariante tras N periodos
$\Delta^{(N)} G = G(y_{N\nu}) - G(y_0)$, $N = 1, 2, \ldots$

$$\Delta^{(N)} G = \boxed{N \ \nabla G(y_0)^T g e(T_0)} + h^{2r-1} N \nabla G(y_0)^T R(T_0, h) + h^{2r-1} \nabla G(y_0)^T R(N T_0, h) + \mathcal{O}\left(\|g e(N T_0)\|^2\right)$$

Explicación teórica

Error en los invariantes

Suponemos una integral primera

$$G(y(t)) = \text{cte} \Rightarrow \nabla G(y(t))^T f(y(t)) = 0 \quad \forall y_0$$

Resultado:

Error en el invariante tras N periodos
$\Delta^{(N)} G = G(y_{N\nu}) - G(y_0),\ N = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\Delta^{(N)} G = & \boxed{N\ \nabla G(y_0)^T ge(T_0)} + h^{2r-1} N \nabla G(y_0)^T R(T_0, h) \\ & + h^{2r-1} \nabla G(y_0)^T R(NT_0, h) + \mathcal{O}\left(\|ge(NT_0)\|^2\right)\end{aligned}$$

Crecimiento lineal del error en el invariante SIEMPRE, mientras $ge(NT_0)$ sea pequeño.

Explicación teórica

Los ejemplos anteriores

- Kepler $\quad T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $\quad T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

Explicación teórica

Los ejemplos anteriores

- Kepler $\quad T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $\quad T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

- DP54 proyección sobre H $\Rightarrow$ Crec. lineal.

Explicación teórica

Los ejemplos anteriores

- Kepler $T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

- DP54 proyección sobre H $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss + Kepler $\Rightarrow H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.

Explicación teórica

Los ejemplos anteriores

- Kepler $T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

- DP54 proyección sobre H $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss + Kepler $\Rightarrow H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- P–S + Kepler $\Rightarrow$ $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.

Explicación teórica

Los ejemplos anteriores

- Kepler $T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

- DP54 proyección sobre H $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss + Kepler $\Rightarrow H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- P–S + Kepler $\Rightarrow$ $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss, P–S $(r = 2)$ + L–V $\Rightarrow \nabla H(y_0)^T ge(T_0) = \mathcal{O}(h^{2r}) \Rightarrow$ Crec. lineal.

Los ejemplos anteriores

- Kepler $T = T(H(p,q))$ (no depende de L)
- L–V y L–V modificado $T = T(H(u,v))$

Si $\|f(y_0)\nabla T(y_0)^T ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^{2r}) \ll \|ge(T_0)\| = \mathcal{O}(h^r) \Rightarrow$ crecimiento lineal.

- DP54 proyección sobre H $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss + Kepler $\Rightarrow H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- P–S + Kepler $\Rightarrow$ $H(y_\nu) - H(y_0) = \mathcal{O}(h^{2r})$ $\Rightarrow$ Crec. lineal.
- Gauss, P–S $(r = 2)$ + L–V $\Rightarrow \nabla H(y_0)^T ge(T_0) = \mathcal{O}(h^{2r}) \Rightarrow$ Crec. lineal.

Otro problema

Ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 y_3 & -c_2 y_2 \\ -c_3 y_3 & 0 & c_1 y_1 \\ c_2 y_2 & -c_1 y_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

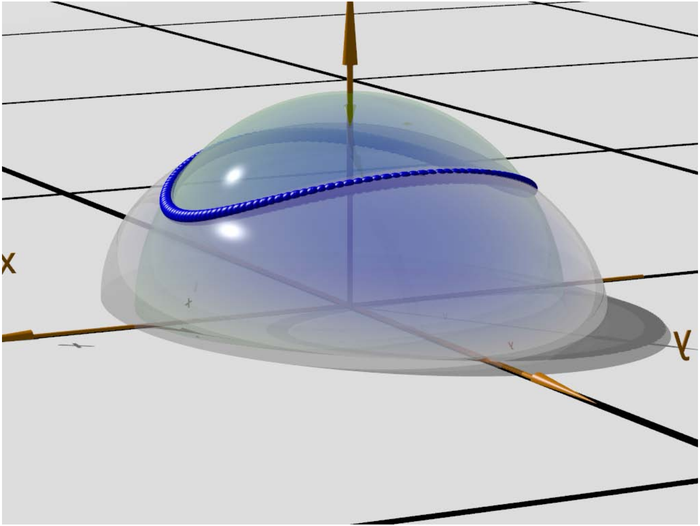
- No Hamiltoniano, Poisson
- Invariantes:

$$E = (c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2)/2 \quad \text{(Energía cinética)}$$

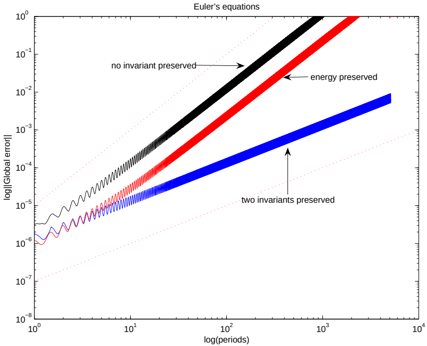
$$L^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad (L \text{ Módulo del momento angular})$$

$$T = T(E, L^2)$$

Órbitas

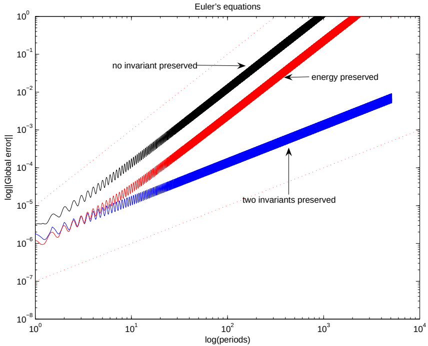


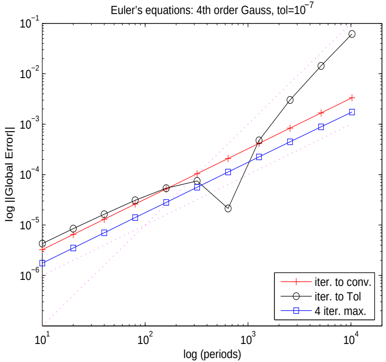
Error global



Ecuaciones de Euler

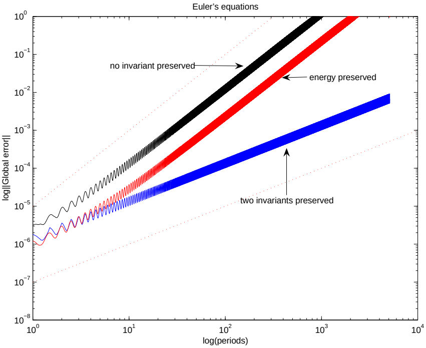
Error global

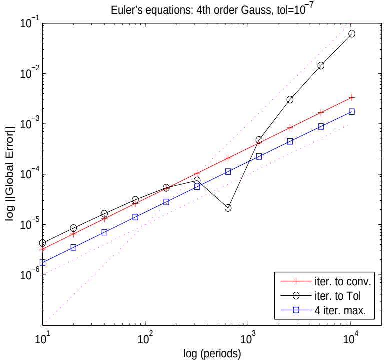




Ecuaciones de Euler

Error global





$$\mathrm{ge}(NT_0) = \boxed{N\ \mathrm{ge}(T_0)} - \boxed{\frac{N(N-1)}{2} f(y_0)\nabla T(y_0)^T \mathrm{ge}(T_0)} + \dots$$