


22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

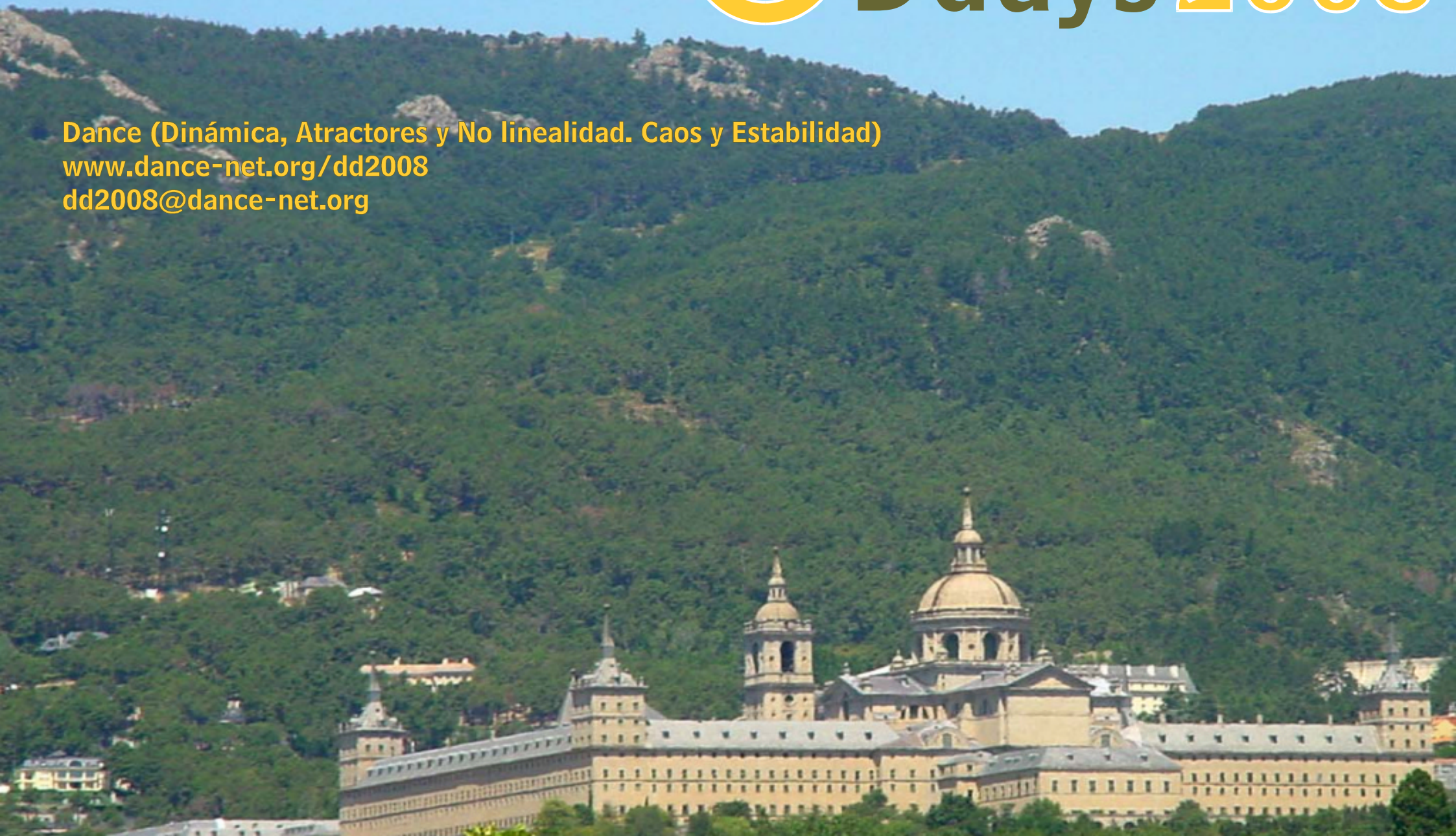
The logo for Ddays 2008 features a stylized lowercase 'd' in yellow with a white outline. Inside the 'd' is a yellow circle with a white outline, resembling a target or a stylized 'o'. To the right of this symbol, the word 'Ddays' is written in a bold, dark grey sans-serif font, and '2008' is written in a yellow sans-serif font with a white outline.

Ddays 2008

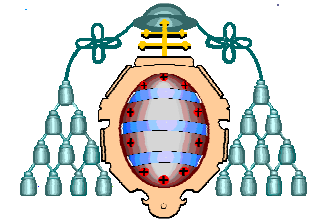
Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)

www.dance-net.org/dd2008

dd2008@dance-net.org



Universidad de Oviedo
Departamento de Matemáticas



**INTEGRABILIDAD, RETRATOS DE FASES
Y CICLOS LÍMITE
EN
CAMPOS POLINOMIALES PLANOS**

Autora: Belén García Fernández

Director: Jesús S. Pérez del Río

El Escorial, Ddays-2008

INTEGRABILIDAD: OBJETIVO

⌘ Clasificación de todos los campos cuadráticos planos, sin factores comunes, que poseen una integral primera polinomial.

CONTEXTO

Teoría de Darboux

☒ **G. Darboux**, *Bull. Sci. Math.* (1878)

Problema de Poincaré

☒ **H. Poincaré**, *Rend. Cir. Mat. Palermo* (1891)

INTEGRALES PRIMERAS POLINOMIALES

Cuadráticos 3-D. Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(Cy + z) \\ \dot{y} = y(x + Az) \\ \dot{z} = z(Bx + y) \end{cases}$$

☒ **S. Labruni**, *J. Math. Phys.* (1996)

☒ **J. Moulin-Ollagnier**, *Bull. Sci. Math.* (1997)

Cuadráticos planos. Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_1 + b_{11}x + b_{12}y) \\ \dot{y} = y(a_2 + b_{21}x + b_{22}y) \end{cases}$$

☒ **L. Cairó, J. Llibre**, *J. Phys.* (2000)

Cuadráticos planos. Sistemas generales

Integrales primeras polinomiales de grado ≤ 4

☒ **J. Llibre, X. Zhang**, *Rocky Mountain J. Math.* (2001)

CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

TEORÍA DE DARBOUX

⌘ **$D=m(m+1)/2$** curvas algebraicas invariantes garantizan la integrabilidad de un sistema polinomial de grado m

☒ **G. Darboux**, *Bull. Sci. Math.* (1878)

INTEGRABILIDAD

⌘ **INTEGRAL PRIMERA RACIONAL**,
☒ **J. P. Jouanolou**, *Lectures Notes in Mathematics*, (1979)

⌘ **INTEGRAL PRIMERA ELEMENTAL**,
☒ **M. J. Prelle, M. F. Singer**, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1983)

⌘ **INTEGRAL PRIMERA DE LIOUVILLE**,
☒ **M. F. Singer**, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1992)

REDUCCIÓN

⌘ Si existen q curvas algebraicas invariantes genéricas cuyos grados sumen $m+1$, el campo es integrable y expresable en términos de las curvas algebraicas invariantes

☒ **C.J. Christopher**, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* (1994)

☒ **H. Zholadek**, *Studia Math.* (1995)

⌘ Reducción del número de Darboux en función de la naturaleza de los puntos singulares del campo

☒ **J. Chavarriga, J. Llibre, J. Sotomayor**, *Exposition. Math.* (1997)

CONJETURA DE POINCARÉ

⌘ Conjetura

El grado de las integrales primeras polinomiales minimales correspondientes a un sistema de grado m está acotado en función del grado del sistema

☒ **H. Poincaré**, *Rend. Cir. Mat. Palermo* (1891)

Contraejemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = \frac{n^3}{8} - \frac{n^2(n-1)}{4}x + \frac{n^2(n-2)}{8}x^2 - \frac{(n-2)}{8}y^2 \end{cases}$$

tiene integral primera polinomial minimal

$$H(x, y) = x^{n-2} \left[\left(\frac{n}{2} - \frac{n-2}{2}x \right)^2 - \frac{n-2}{n}y^2 \right]$$

☒ **J. Llibre, X. Zhang**, *Rocky Mountain J. Math.* (2001)

Si $\text{m.c.d.}(P, Q) = 1$ y el campo tiene integral primera polinomial, entonces existe R factor integrante polinomial tal que $\text{deg}(H) - \text{deg}(R) = m + 1$



**deg(H) y deg(R)
no acotados en función de m**



INVERSO DE FACTOR INTEGRANTE POLINOMIAL

Si $\text{m.c.d.}(P,Q)=1$ y el sistema tiene integral primera polinomial, entonces tiene un inverso de factor integrante polinomial V

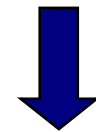
Inverso de factor integrante

$$\begin{cases} \dot{x} = -y[2x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2] \\ \dot{y} = x[2x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2)^2] \end{cases}$$

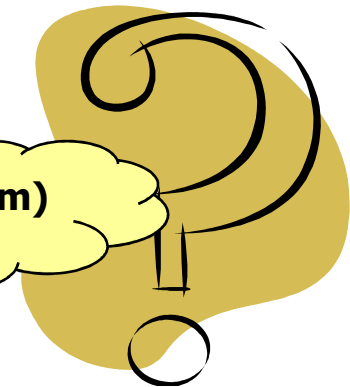
no tiene integral primera polinomial, sin embargo, tiene inverso de factor integrante polinomial

$$V(x, y) = (x^2 + y^2)^2(2x^2 + y^2)$$

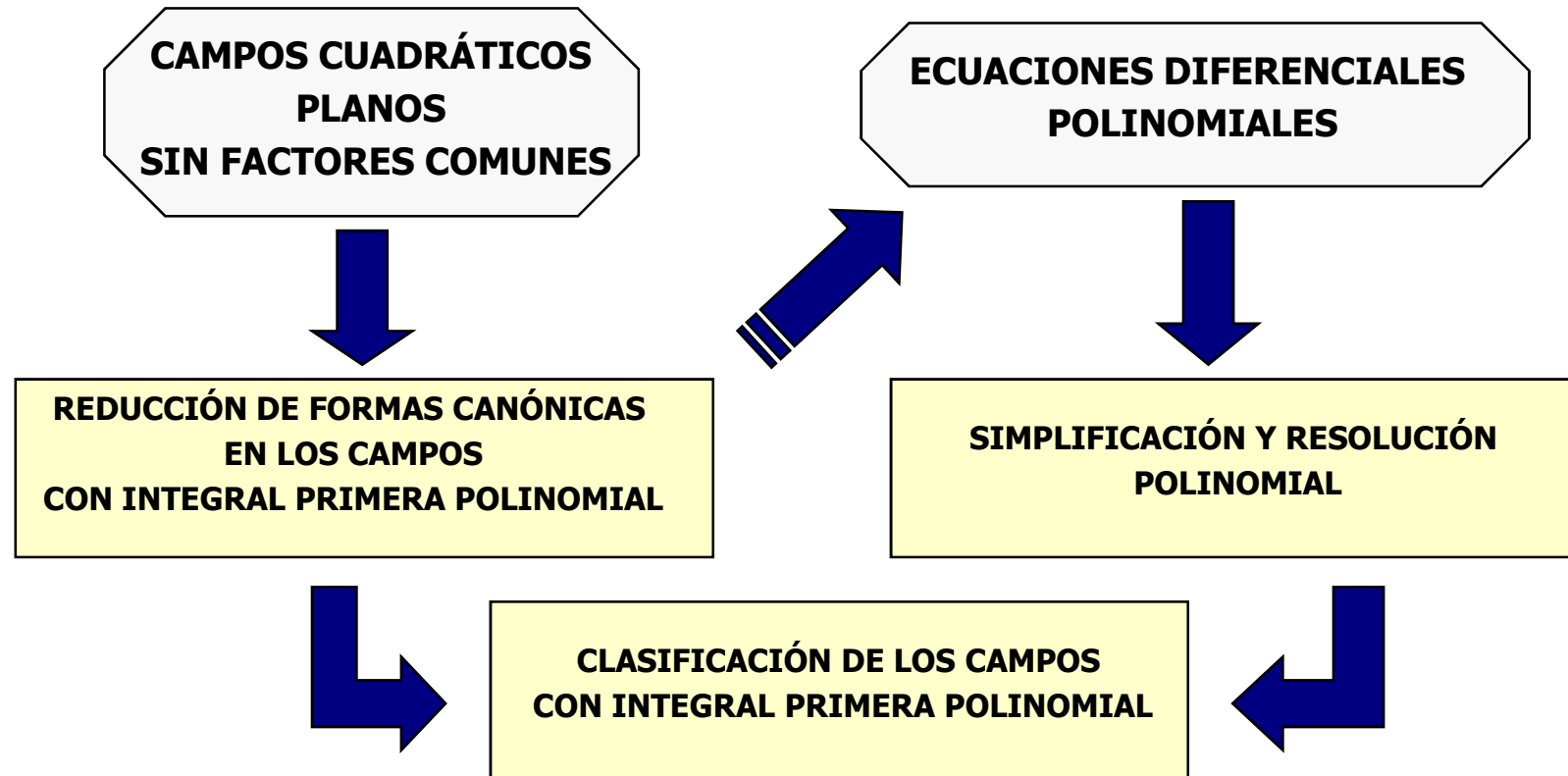
✎ **J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre,**
J. Differential Equations (2003)



$$\text{deg}(V) < f(m)$$



ESQUEMA DEL PROCESO



☒ *J. Chavarriga, B. García, J. Llibre, J. S. Pérez del Río, J. A. Rodríguez,*
Polynomial first integral of quadratic vector fields.
J. Differential Equations **230** (2006), nº2, 393-421

FORMAS CANÓNICAS

<i>FORMAS CANÓNICAS</i>		<i>i)</i>	<i>ii)</i>	<i>iii)</i>	<i>iv)</i>	<i>v)</i>	<i>vi)</i>	<i>vii)</i>	<i>viii)</i>	<i>ix)</i>	<i>x)</i>
<i>A. Gasull, Li Ren, J. Llibre</i>	<i>P</i>	$1 + xy$	xy	$y + x^2$	y	$1 + x^2$	$-1 + x^2$	x^2	x	1	0
<i>Rocky Mountain J. Math. (1986)</i>	En todos los casos $Q = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$										

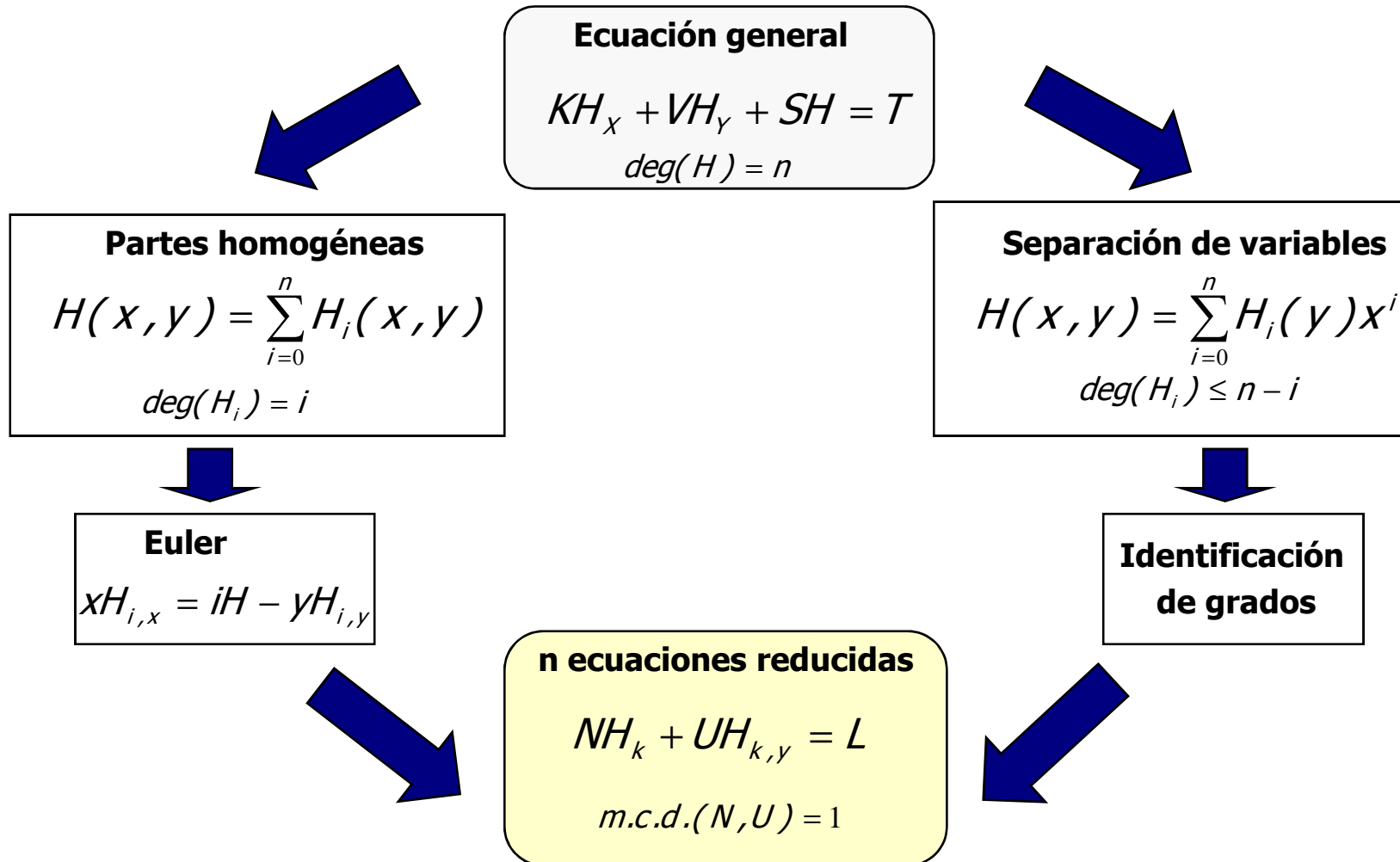
ALGORITMO DE REDUCCIÓN DE FORMAS CANÓNICAS

- 1.-Análisis de los coeficientes de grado alto de la ecuación $H_x P + H_y Q \equiv 0$
- 2.-Simplificación a través de cambios de variable
- 3.- Integración directa, cuando sea posible
- 4.- Detección de factores comunes

FORMAS CANÓNICAS REDUCIDAS

- | | |
|--|--|
| $1.- \begin{cases} \dot{x} = r + xy \\ \dot{y} = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \\ r \in \{0,1\}, f \in Q^- \cup \{0\} \\ a^2 + b^2 + d^2 + r^2 \neq 0 \end{cases}$ | $2.- \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a + cy + dx^2 \\ d \neq 0 \end{cases}$ |
| $3.- \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = cy + dx^2 \\ c \in Q^- \quad d \neq 0 \end{cases}$ | $4.- \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = dx^2 \\ d \neq 0 \end{cases}$ |

REDUCCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POLINOMIALES



TRATAMIENTO DE LAS ECUACIONES REDUCIDAS

$$L = 0$$

$$U = \prod_{i=1}^k P_i^{k_i}$$

$m.c.d.(P_i, P_j) = 1 \quad i \neq j$

$$NH + UH_y = L$$

$m.c.d.(N, U) = 1$
 $\deg(H) = n$

$$L = J \prod_{i=1}^k P_i^{k_i}$$

$P_i \text{ divide a } U \quad \forall i$
 $m.c.d.(P_i, P_j) = 1 \quad i \neq j$
 $m.c.d.(P_i, J) = 1$

$\exists n_i \geq k_i \text{ tal que}$

$$N + \sum_{j=1}^k n_j P_{j,y} \frac{U}{P_j} = 0$$

$$W = \begin{cases} \alpha X^{n - \sum n_i \deg(P_i)} & \text{partes homogéneas} \\ \alpha & \text{por separación de variables} \end{cases}$$

$\exists n_i \leq k_i \text{ tal que}$

$$\left[N + \sum_{j=1}^k n_j P_{j,y} \frac{U}{P_j} \right] W + U W_y = J \prod_{i=1}^k P_i^{k_i - n_i}$$

ECUACIÓN SIMPLIFICADA

W puede calcularse a través de un sistema lineal

$$H = \prod_{i=1}^k P_i^{n_i} W$$

$m.c.d.(P_i, W) = 1$

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN

$X=(P,Q)$ campo cuadrático sin factores comunes expresado en alguna de las 4 formas canónicas reducidas, tiene integral primera polinomial de grado n si y sólo si se verifica alguna de las siguientes posibilidades:

i) El sistema está en la Forma 1 y además se verifica que $\exists p, q \in \mathbf{N} /$

I $f = (p + q - n) / p + q \in \mathbf{Q}^-$ y $rf \in (-1, 0]$

II $(1 - f)d(q - p)^2 = pqe^2$

III $dc(2f - 1) = bef$

IV $[(f(p - q)^2 a + c^2 pq)^2 + (1 - r)(da(2f - 1)^2 - f(f - 1)b^2)^2]$

$[r + c^2 + (p - q)^2(f + 1)^2] = 0$

V $r[b^2 + d^2 + a^2(n - 2p - q)^2(n - p - q - 1)^2][[(p - q)^2 + (1 + 2f)^2] = 0$

ii) El sistema está en la Forma 2 y además se verifica que $\exists p \in \mathbf{N} / n = 3p$ y $c = 0$

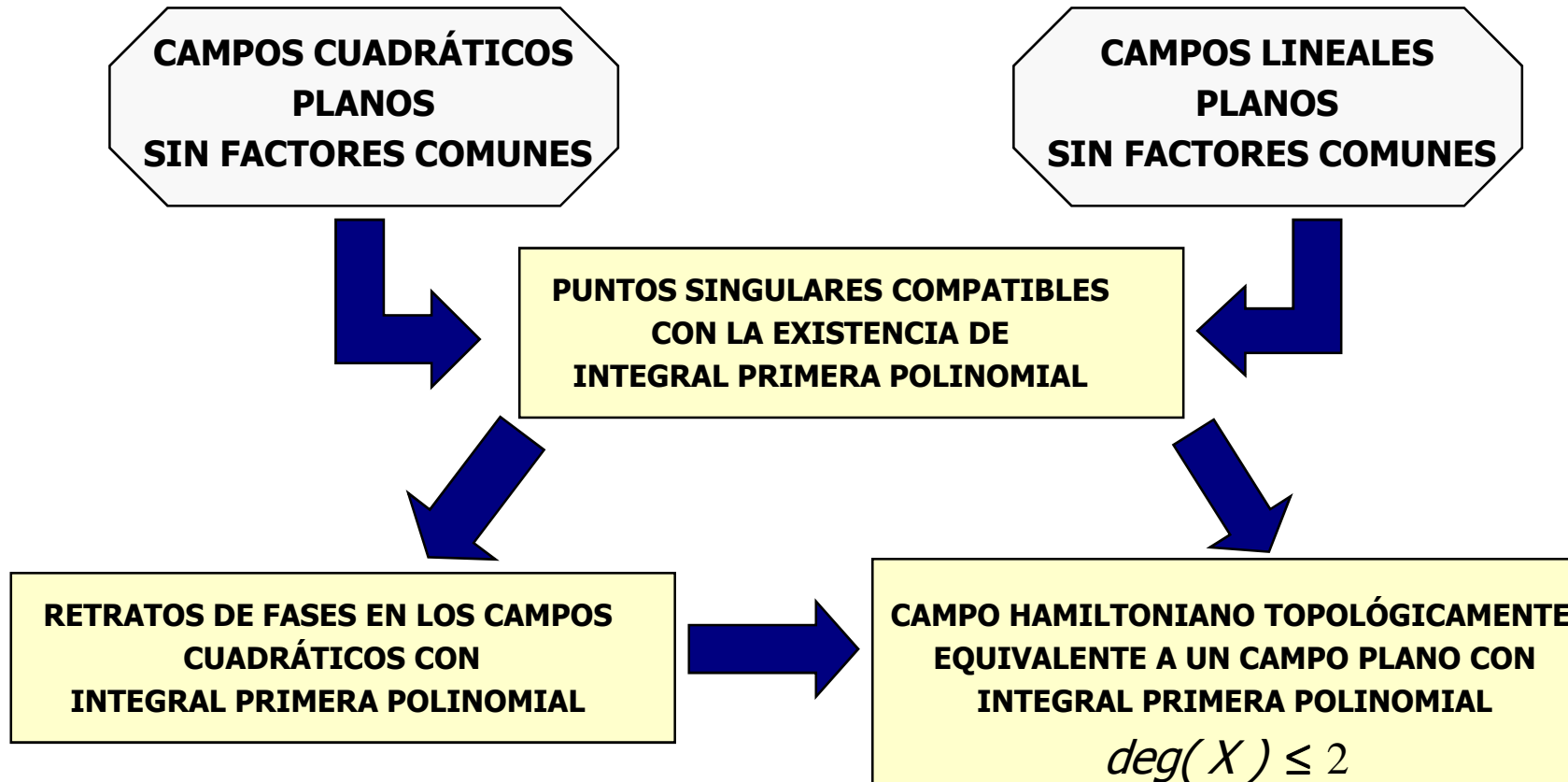
iii) El sistema está en la Forma 3 y además se verifica que $\exists p, q \in \mathbf{N} / n = p + 2q$ y $c = -\frac{p}{q}$

iv) El sistema está en la Forma 4 y además se verifica que $\exists p \in \mathbf{N} / n = 3p$

RETRATOS DE FASES:OBJETIVO

⌘ Determinación de todos los retratos de fases de los campos cuadráticos planos, sin factores comunes, que poseen una integral primera polinomial.

ESQUEMA DEL PROCESO



☒ **B. García, J. Llibre, J. S. Pérez del Río**

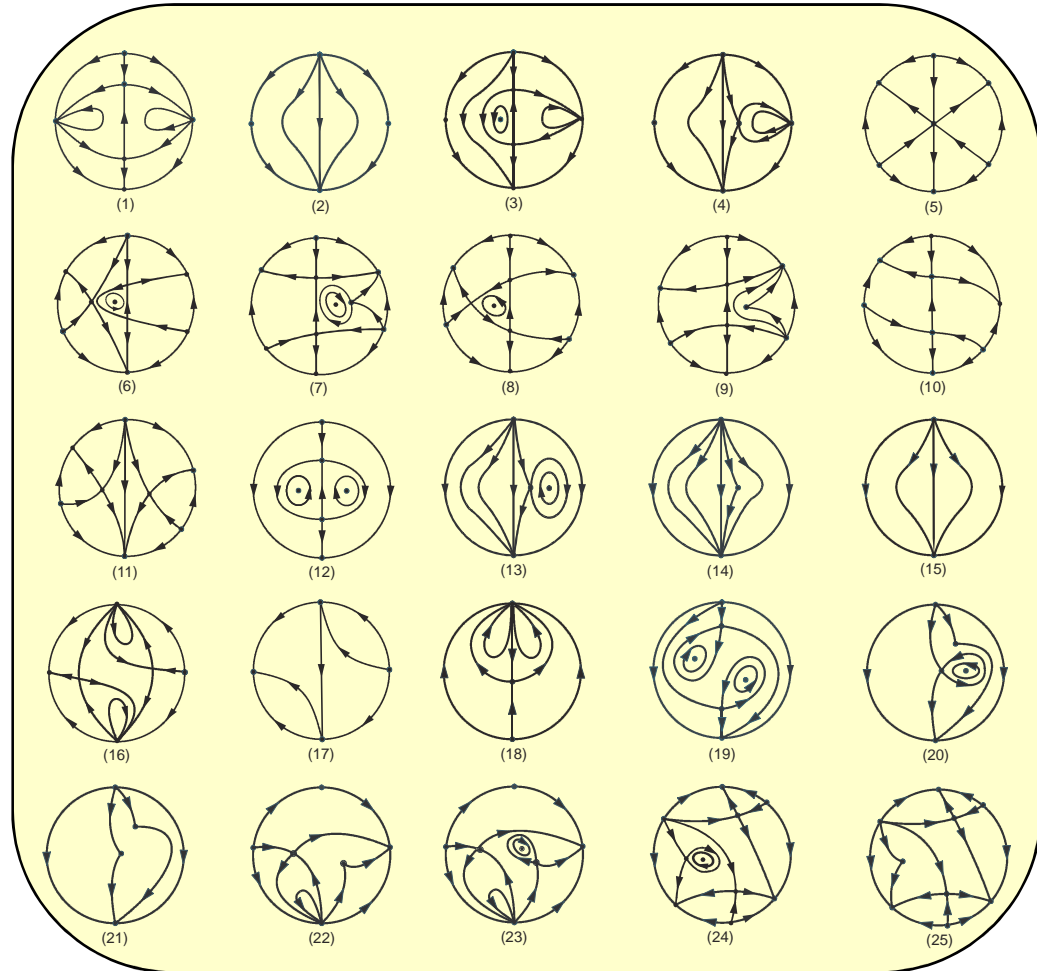
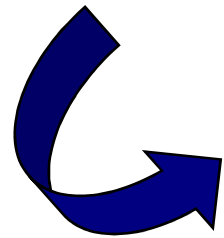
Phase Portraits of the quadratics vector fields with a Polynomial First Integral.

Rend. Cir. Mat. Palermo serie 2, **55** (2006), nº3, 420-440

RETRATOS DE FASES EN CAMPOS CUADRÁTICOS CON INTEGRAL PRIMERA POLINOMIAL

ALGORITMO PARA DETERMINAR LOS RETRATOS DE FASES

- 1.- *Puntos críticos finitos*
- 2.- *Puntos críticos en el infinito*
- 3.- *Curvas algebraicas invariantes*
- 4.- *Conexiones de puntos singulares*



EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA CON LOS CAMPOS HAMILTONIANOS

**RETRATOS DE FASES EN LOS CAMPOS
CUADRÁTICOS HAMILTONIANOS**

☒ *J. C. Artés, J. Llibre, J. Differential Equations (1994)*

TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES

**RETRATOS DE FASES EN LOS CAMPOS
CUADRÁTICOS CON
INTEGRAL PRIMERA POLINOMIAL**

SISTEMAS LINEALES CON INTEGRAL PRIMERA POLINOMIAL

FORMAS CANÓNICAS

$$\text{I.-} \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{Q}^- \quad \text{II.-} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{III.-} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \lambda x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

TOPOLÓGICAMENTE EQUIVALENTES



FORMAS CANÓNICAS HAMILTONIANAS

$$\text{1.-} \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{2.-} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{3.-} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \lambda x \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

CONJETURA

¿ **EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA DE LOS CAMPOS DE GRADO ARBITRARIO CON INTEGRAL PRIMERA POLINOMIAL CON LOS CAMPOS HAMILTONIANOS**



CICLOS LÍMITE:OBJETIVO

⌘ Utilizando la teoría del promedio se trata de actualizar la cota inferior del número de ciclos límite rodeando un único punto singular, perturbando adecuadamente el centro:

$$\dot{x} = -y[(a+1)x^2 + ay^2 + b]$$

$$\dot{y} = x[(a+1)x^2 + ay^2 + b]$$

$$ab \neq 0$$

EL PROBLEMA 16 DE HILBERT

⌘ ¿Cuál es el número máximo L_m de ciclos límite de los campos polinomiales de grado m y cuál la disposición relativa de los mismos en el plano?

☒ **D. Hilbert**, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1902)



CICLOS LÍMITE Y BIFURCACIONES

CAMPO POLINOMIAL CON UN CENTRO

$$\dot{x} = -yR(x, y)$$

$$\dot{y} = xR(x, y)$$

ORBITAS DEL ANILLO DE PERIODOS



PERTURBACIÓN DEL CAMPO

$$\dot{x} = -yR(x, y) + \varepsilon p(x, y)$$

$$\dot{y} = xR(x, y) + \varepsilon q(x, y)$$

$$\deg(\mathbf{X}) = m$$

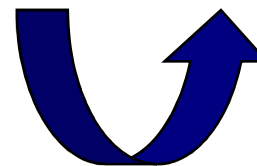
CICLOS LÍMITE

MÉTODOS PARA DETERMINAR CICLOS LÍMITE POR BIFURCACIÓN DE UN CENTRO

- ⌘ *INTEGRALES ABELIANAS*
- ⌘ *INVERSO DE FACTOR INTEGRANTE*
- ⌘ *TEORÍA DEL PROMEDIO*

$L_m =$ nº de ciclos límite

$L_m^r =$ nº de ciclos límite
rodeando un único
punto singular



TEORÍA DEL PROMEDIO

ECUACIÓN INICIAL

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ECUACIÓN PROMEDIADA

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) dt$$

En condiciones adecuadas de regularidad se tiene que:

- ⌘ Si \mathbf{p}_0 es un punto singular de la ecuación promediada y $\det\left[\frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{p}_0)\right] \neq 0$ entonces el sistema inicial tiene una órbita periódica aislada $\gamma_\varepsilon(t) = \mathbf{p}_0 + O(\varepsilon)$
- ⌘ Si \mathbf{p}_0 es hiperbólico, entonces γ_ε es también hiperbólica con el mismo tipo de estabilidad que \mathbf{p}_0



Las órbitas periódicas obtenidas por bifurcación se pueden analizar a través de los ceros de una función.

ESQUEMA DEL PROCESO

**CAMPO PLANO
PERTURBADO**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yR(x, y) + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} &= xR(x, y) + \varepsilon q(x, y)\end{aligned}$$

NÚMERO DE CICLOS LÍMITE CUANDO

$$\begin{aligned}R(x, y) &= (a+1)x^2 + ay^2 + b \\ ab &\neq 0\end{aligned}$$

ACTUALIZACIÓN DE LA COTA INFERIOR DE L_m^r

☒ **B. García, J. Llibre, J. S. Pérez del Río**, *On the number of limit cycles surrounding a unique singular point for polynomial differential systems of arbitrary degree.*
Aparecerá en *Nonlinear Anal., Ser. A: Theory, Methods & Applications*

FUNCIÓN DE PROMEDIO

SISTEMA CÚBICO PERTURBADO

$$\begin{cases} \dot{x} = -y[(a+1)x^2 + ay^2 + b] + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} = x[(a+1)x^2 + ay^2 + b] + \varepsilon q(x, y) \end{cases} \quad ab \neq 0$$

cambio de variable a coordenadas polares

FUNCIÓN DE PROMEDIO

$$F(r) = r \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{j+1} b_k^{(j+1)} S_k(r) r^{2j-2}$$

FUNCIONES $S_k(r)$

$$S_k(r) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-\lambda(r))^{k-1-l}}{2^{2l}} \binom{2l}{l} + \frac{(-\lambda(r))^k}{\sqrt{\lambda(r)(\lambda(r)+1)}} \quad \text{si } k \geq 0$$

$$\text{con } \lambda(r) = a + \frac{b}{r^2}$$

NÚMERO DE CICLOS LÍMITE

ALGORITMO PARA DETERMINAR EL NÚMERO DE CICLOS LÍMITE

1.- Los coeficientes $b_k^{(j+1)}$ se pueden elegir de forma arbitraria

2.- Las funciones $\{S_k(r) r^{2j-2}\}_{k=0,1,\dots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}^{j=0,1,\dots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}$ constituyen $N(m) = \frac{1}{2}(\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 4)(\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1)$ funciones linealmente independientes

3.- La función $F(r)$ tiene al menos $N(m) - 1$ ceros simples en el intervalo $(0, r)$

⌘ Si tenemos $p+1$ funciones analíticas linealmente independientes y una de ellas de signo constante en un intervalo real U , entonces existe alguna combinación lineal de esas funciones que posee p ceros simples en U

☒ **B. Coll, A. Gasull, R. Prohens**, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A: Math. Anal.* (2005)

NÚMERO DE CICLOS LÍMITE

$$\frac{1}{2}(\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 4)(\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1) - 1$$

ACTUALIZACIÓN DE LA COTA INFERIOR DE CICLOS LÍMITE L_m^r

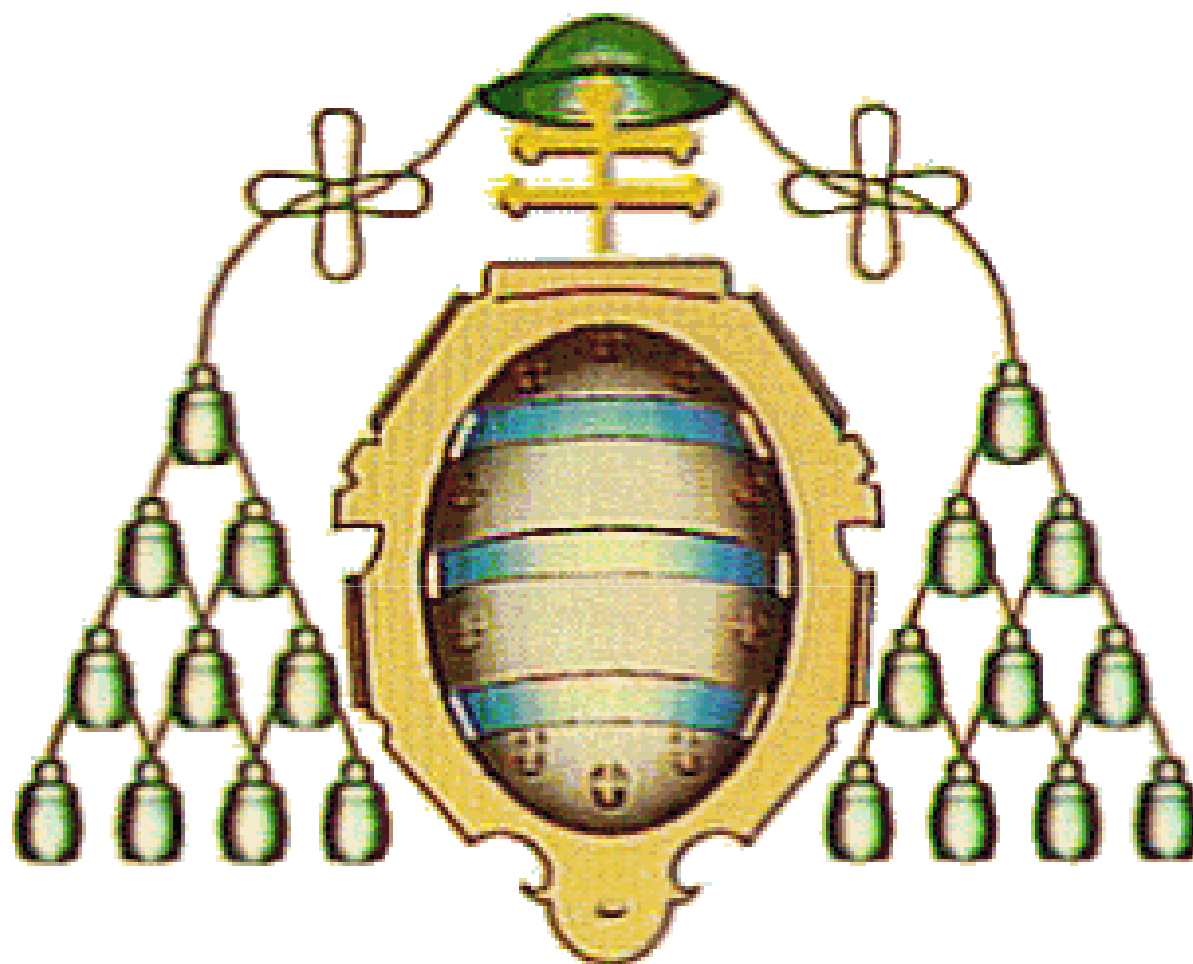
$$L_m^r \geq L(m) = \begin{cases} \frac{1}{8}(m+1)(m+7) - 1 & \text{si } m \text{ impar} \\ \frac{1}{8}m(m+6) & \text{si } m \text{ par} \end{cases}$$

☒ **B. García, J. Llibre, J. S. Pérez del Río,**
Nonlinear Anal., Ser. A: Theory, Methods & Applications

☒ **B. Coll, A. Gasull, R. Prohens,** *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A: Math. Anal.* (2005)

PROPIEDADES DE LA COTA $L(m)$

- i) $L(1) = 1$ y $L(2j+1) = L(2j-1) + j + 2$
- ii) $L(2) = 2$ y $L(2j+2) = L(2j) + j + 2$
- iii) $L(2j+1) = L(2j) + j + 1$, para $j = 1, 2, \dots$



UNIVERSIDAD DE OVIEDO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS