


22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

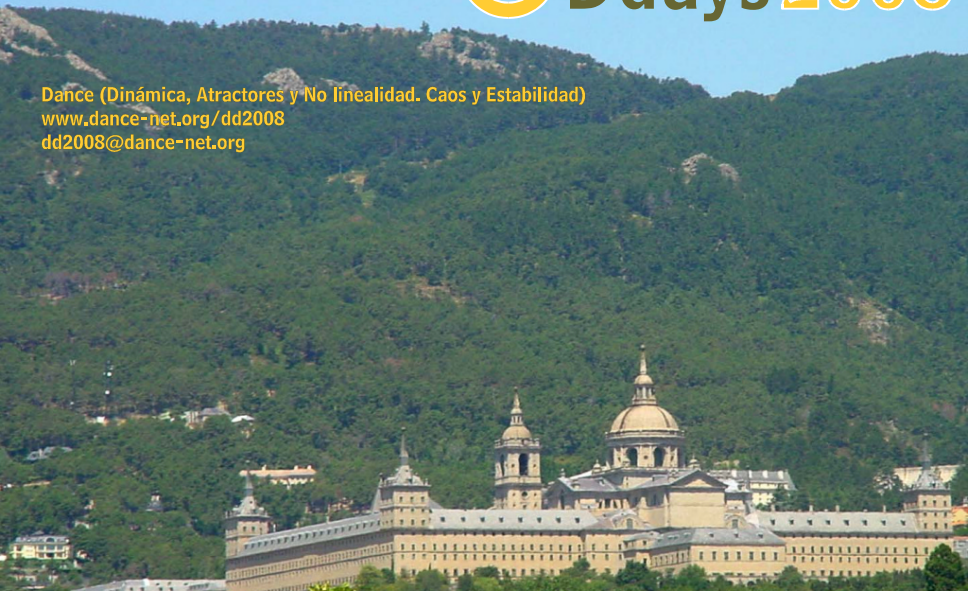
Cuarta reunión de la red temática Dance

 Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)

www.dance-net.org/dd2008

dd2008@dance-net.org



Pérdida de regularidad en ecuaciones casi periódicas escalares convexas

Sylvia Novo, Rafael Obaya y Ana M. Sanz

Departamento de Matemática Aplicada
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Novo, Obaya, Sanz, Almost periodic and almost automorphic dynamics for scalar convex differential equations, Israel J. of Math. (2004).

Ecuaciones quasi-periódicas escalares convexas

$$x' = x^2 + f(t) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

✓ x^2 C^1 , estrictamente convexa y coercitiva: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^2 = \infty$;

✓ $f(t)$ es quasi periódica: dado un **vector de frecuencias** $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) \in \mathbb{R}^k$ con componentes racionalmente independientes,

$$f(t) = q(\phi_1 t, \dots, \phi_k t)$$

con $q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua y 1-periódica en cada componente.

Ej.: $f(t) = \text{sen}(2\pi\sqrt{2}t) + \text{cos}(2\pi t)$ con $\phi = (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Cuestiones básicas en el problema perturbativo dependiendo del valor del parámetro α :

1. ¿Existe alguna solución quasi periódica? ¿Cuántas?
Posible fenómeno de pérdida de regularidad de las soluciones.
2. ¿Comportamiento a largo plazo de las soluciones?

Ecuaciones quasi-periódicas escalares convexas

$$x' = x^2 + f(t) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

✓ x^2 C^1 , estrictamente convexa y coercitiva: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^2 = \infty$;

✓ $f(t)$ es quasi periódica: dado un **vector de frecuencias** $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) \in \mathbb{R}^k$ con componentes racionalmente independientes,

$$f(t) = q(\phi_1 t, \dots, \phi_k t)$$

con $q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua y 1-periódica en cada componente.

Ej.: $f(t) = \text{sen}(2\pi\sqrt{2}t) + \text{cos}(2\pi t)$ con $\phi = (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Cuestiones básicas en el problema perturbativo dependiendo del valor del parámetro α :

1. ¿Existe alguna solución quasi periódica? ¿Cuántas?

Posible fenómeno de pérdida de regularidad de las soluciones.

2. ¿Comportamiento a largo plazo de las soluciones?

Ecuaciones quasi-periódicas escalares convexas

$$x' = x^2 + f(t) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

✓ x^2 C^1 , estrictamente convexa y coercitiva: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^2 = \infty$;

✓ $f(t)$ es quasi periódica: dado un **vector de frecuencias** $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) \in \mathbb{R}^k$ con componentes racionalmente independientes,

$$f(t) = q(\phi_1 t, \dots, \phi_k t)$$

con $q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua y 1-periódica en cada componente.

Ej.: $f(t) = \text{sen}(2\pi\sqrt{2}t) + \text{cos}(2\pi t)$ con $\phi = (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Cuestiones básicas en el problema perturbativo dependiendo del valor del parámetro α :

1. ¿Existe alguna solución quasi periódica? ¿Cuántas?
Posible fenómeno de pérdida de regularidad de las soluciones.
2. ¿Comportamiento a largo plazo de las soluciones?

Ecuaciones quasi-periódicas escalares convexas

$$x' = x^2 + f(t) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

✓ $x^2 \in C^1$, estrictamente convexa y coercitiva: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^2 = \infty$;

✓ $f(t)$ es quasi periódica: dado un **vector de frecuencias** $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) \in \mathbb{R}^k$ con componentes racionalmente independientes,

$$f(t) = q(\phi_1 t, \dots, \phi_k t)$$

con $q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua y 1-periódica en cada componente.

Ej.: $f(t) = \sin(2\pi\sqrt{2}t) + \cos(2\pi t)$ con $\phi = (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Cuestiones básicas en el problema perturbativo dependiendo del valor del parámetro α :

1. ¿Existe alguna solución quasi periódica? ¿Cuántas?
Posible fenómeno de pérdida de regularidad de las soluciones.
2. ¿Comportamiento a largo plazo de las soluciones?

Bifurcación no autónoma tipo silla-nodo

Caso autónomo: $x' = x^2 + \alpha$ Equilibrios $\begin{cases} \pm\sqrt{-\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \emptyset & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$

Caso periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ 1-periódica.

Mawhin (1987): existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones 1-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ 1 \text{ solución 1-periódica} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Caso quasi-periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ quasi-periódica.

Novo, Obaya, S. (2004): Existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones quasi-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ \text{posible pérdida de regularidad} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Bifurcación no autónoma tipo silla-nodo

Caso autónomo: $x' = x^2 + \alpha$ Equilibrios $\begin{cases} \pm\sqrt{-\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \emptyset & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$

Caso periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ 1-periódica.

Mawhin (1987): existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones 1-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ 1 \text{ solución 1-periódica} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Caso quasi-periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ quasi-periódica.

Novo, Obaya, S. (2004): Existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones quasi-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ \text{posible pérdida de regularidad} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Bifurcación no autónoma tipo silla-nodo

Caso autónomo: $x' = x^2 + \alpha$ Equilibrios $\begin{cases} \pm\sqrt{-\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \emptyset & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$

Caso periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ 1-periódica.

Mawhin (1987): existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones 1-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ 1 \text{ solución 1-periódica} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Caso quasi-periódico: $x' = x^2 + f(t) + \alpha$ con $f(t)$ quasi-periódica.

Novo, Obaya, S. (2004): Existe un valor $\alpha^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 2 \text{ soluciones quasi-periódicas} & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ \text{posible pérdida de regularidad} & \text{si } \alpha = \alpha^* \\ \text{no hay soluciones acotadas} & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

Sistema dinámico triangular inducido en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$

Familia de ecuaciones en la envolvente $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$

$$x' = x^2 + p(\omega + t\phi) + \alpha, \quad \omega \in \mathbb{T}^k$$

con $p : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua, también llamado **sistema forzado quasi periódicoamente**. Se puede ver como un sistema autónomo en el espacio ampliado $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \omega' = \phi \\ x' = x^2 + p(\omega) + \alpha. \end{cases}$$

Flujo local inducido por las soluciones para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\longmapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

Flujo de Kronecker en el toro: minimal y únicamente ergódico.

Sistema dinámico triangular inducido en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$

Familia de ecuaciones en la envolvente $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$

$$x' = x^2 + p(\omega + t\phi) + \alpha, \quad \omega \in \mathbb{T}^k$$

con $p : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continua, también llamado **sistema forzado quasi periódicoamente**. Se puede ver como un sistema autónomo en el espacio ampliado $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \omega' = \phi \\ x' = x^2 + p(\omega) + \alpha. \end{cases}$$

Flujo local inducido por las soluciones para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\longmapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

Flujo de Kronecker en el toro: minimal y únicamente ergódico.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\longmapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

¿Conjuntos minimales para el flujo? $M \subset \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$ compacto, invariante e irreducible.

M minimal $\Rightarrow M$ proyecta sobre todos los puntos del toro, es decir, $\forall \omega \in \mathbb{T}^k$ existe $(\omega, x) \in M$.

M minimal $\Rightarrow M$ es extensión casi automórfica de la base; en otras palabras, un conjunto pinzado, es decir, existe $\omega \in \mathbb{T}^k$ tal que

$$\text{card}\{x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in M\} = 1.$$

Minimales con la estructura más simple: copias de la base $\{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\} \simeq \mathbb{T}^k$, si $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continua de la ecuación de invarianza:

$$x(t, \omega, c(\omega), \alpha) = c(\omega + t\phi), \quad \omega \in \mathbb{T}^k, t \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos equilibrio a cualquier solución medible y acotada de la ecuación de invarianza.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\mapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

¿Conjuntos minimales para el flujo? $M \subset \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$ compacto, invariante e irreducible.

M minimal $\Rightarrow M$ proyecta sobre todos los puntos del toro, es decir, $\forall \omega \in \mathbb{T}^k$ existe $(\omega, x) \in M$.

M minimal $\Rightarrow M$ es extensión casi automórfica de la base; en otras palabras, un conjunto pinzado, es decir, existe $\omega \in \mathbb{T}^k$ tal que

$$\text{card}\{x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in M\} = 1.$$

Minimales con la estructura más simple: copias de la base $\{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\} \simeq \mathbb{T}^k$, si $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continua de la ecuación de invarianza:

$$x(t, \omega, c(\omega), \alpha) = c(\omega + t\phi), \quad \omega \in \mathbb{T}^k, t \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos equilibrio a cualquier solución medible y acotada de la ecuación de invarianza.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\longmapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

¿Conjuntos minimales para el flujo? $M \subset \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$ compacto, invariante e irreducible.

M minimal $\Rightarrow M$ proyecta sobre todos los puntos del toro, es decir, $\forall \omega \in \mathbb{T}^k$ existe $(\omega, x) \in M$.

M minimal $\Rightarrow M$ es **extensión casi automórfica de la base**; en otras palabras, un conjunto pinzado, es decir, existe $\omega \in \mathbb{T}^k$ tal que

$$\text{card}\{x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in M\} = 1.$$

Minimales con la estructura más simple: **copias de la base** $\{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\} \simeq \mathbb{T}^k$, si $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continua de la **ecuación de invarianza**:

$$x(t, \omega, c(\omega), \alpha) = c(\omega + t\phi), \quad \omega \in \mathbb{T}^k, t \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos **equilibrio** a cualquier solución medible y acotada de la ecuación de invarianza.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\mapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

¿Conjuntos minimales para el flujo? $M \subset \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$ compacto, invariante e irreducible.

M minimal $\Rightarrow M$ proyecta sobre todos los puntos del toro, es decir, $\forall \omega \in \mathbb{T}^k$ existe $(\omega, x) \in M$.

M minimal $\Rightarrow M$ es **extensión casi automórfica de la base**; en otras palabras, un conjunto pinzado, es decir, existe $\omega \in \mathbb{T}^k$ tal que

$$\text{card}\{x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in M\} = 1.$$

Minimales con la estructura más simple: **copias de la base**

$\{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\} \simeq \mathbb{T}^k$, si $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continua de la **ecuación de invarianza**:

$$x(t, \omega, c(\omega), \alpha) = c(\omega + t\phi), \quad \omega \in \mathbb{T}^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos **equilibrio** a cualquier solución medible y acotada de la ecuación de invarianza.

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \\ (t, \omega, x_0) &\longmapsto (\omega + t\phi, x(t, \omega, x_0, \alpha)). \end{aligned}$$

¿Conjuntos minimales para el flujo? $M \subset \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$ compacto, invariante e irreducible.

M minimal $\Rightarrow M$ proyecta sobre todos los puntos del toro, es decir, $\forall \omega \in \mathbb{T}^k$ existe $(\omega, x) \in M$.

M minimal $\Rightarrow M$ es **extensión casi automórfica de la base**; en otras palabras, un conjunto pinzado, es decir, existe $\omega \in \mathbb{T}^k$ tal que

$$\text{card}\{x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in M\} = 1.$$

Minimales con la estructura más simple: **copias de la base** $\{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\} \simeq \mathbb{T}^k$, si $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continua de la **ecuación de invarianza**:

$$x(t, \omega, c(\omega), \alpha) = c(\omega + t\phi), \quad \omega \in \mathbb{T}^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos **equilibrio** a cualquier solución medible y acotada de la ecuación de invarianza.

Exponente de Lyapunov de un equilibrio

Definiciones: Sea $x' = g(\omega + t\phi, x)$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ una familia de ecuaciones escalares forzadas quasi-periódicamente con g continua, y de clase C^1 en x . Sea $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un equilibrio para el flujo triangular inducido por las soluciones en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$.

1.- Exponente de Lyapunov

$$\gamma(c) := \int_{\mathbb{T}^k} \frac{\partial g}{\partial x}(\omega, c(\omega)) dm$$

siendo m la medida de Lebesgue en el toro.

2.- Se dice que el equilibrio c es $\begin{cases} \text{estable} & \text{si } \gamma(c) < 0 \\ \text{inestable} & \text{si } \gamma(c) > 0 \\ \text{neutro} & \text{si } \gamma(c) = 0. \end{cases}$

3.- Un minimal M para el flujo se llama hiperbólico si las ecuaciones linealizadas sobre M tienen una dicotomía exponencial.

Si el minimal M es hiperbólico, es copia de la base y es o bien estable si $\gamma < 0$ (atractor), o bien inestable si $\gamma > 0$ (repulsor).

Exponente de Lyapunov de un equilibrio

Definiciones: Sea $x' = g(\omega + t\phi, x)$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ una familia de ecuaciones escalares forzadas quasi-periódicamente con g continua, y de clase C^1 en x . Sea $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un equilibrio para el flujo triangular inducido por las soluciones en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$.

1.- Exponente de Lyapunov

$$\gamma(c) := \int_{\mathbb{T}^k} \frac{\partial g}{\partial x}(\omega, c(\omega)) dm$$

siendo m la medida de Lebesgue en el toro.

2.- Se dice que el equilibrio c es

{	estable	si	$\gamma(c) < 0$
	inestable	si	$\gamma(c) > 0$
	neutro	si	$\gamma(c) = 0$.

3.- Un minimal M para el flujo se llama hiperbólico si las ecuaciones linealizadas sobre M tienen una dicotomía exponencial.

Si el minimal M es hiperbólico, es copia de la base y es o bien estable si $\gamma < 0$ (atractor), o bien inestable si $\gamma > 0$ (repulsor).

Exponente de Lyapunov de un equilibrio

Definiciones: Sea $x' = g(\omega + t\phi, x)$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ una familia de ecuaciones escalares forzadas quasi-periódicamente con g continua, y de clase C^1 en x . Sea $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un equilibrio para el flujo triangular inducido por las soluciones en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$.

1.- Exponente de Lyapunov

$$\gamma(c) := \int_{\mathbb{T}^k} \frac{\partial g}{\partial x}(\omega, c(\omega)) dm$$

siendo m la medida de Lebesgue en el toro.

2.- Se dice que el equilibrio c es

{	estable	si	$\gamma(c) < 0$
	inestable	si	$\gamma(c) > 0$
	neutro	si	$\gamma(c) = 0$.

3.- Un minimal M para el flujo se llama **hiperbólico** si las ecuaciones linealizadas sobre M tienen una dicotomía exponencial.

Si el minimal M es hiperbólico, es copia de la base y es o bien estable si $\gamma < 0$ (atractor), o bien inestable si $\gamma > 0$ (repulsor).

Exponente de Lyapunov de un equilibrio

Definiciones: Sea $x' = g(\omega + t\phi, x)$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ una familia de ecuaciones escalares forzadas quasi-periódicamente con g continua, y de clase C^1 en x . Sea $c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un equilibrio para el flujo triangular inducido por las soluciones en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$.

1.- Exponente de Lyapunov

$$\gamma(c) := \int_{\mathbb{T}^k} \frac{\partial g}{\partial x}(\omega, c(\omega)) dm$$

siendo m la medida de Lebesgue en el toro.

2.- Se dice que el equilibrio c es

{	estable	si	$\gamma(c) < 0$
	inestable	si	$\gamma(c) > 0$
	neutro	si	$\gamma(c) = 0$.

3.- Un minimal M para el flujo se llama **hiperbólico** si las ecuaciones linealizadas sobre M tienen una dicotomía exponencial.

Si el minimal M es hiperbólico, es copia de la base y es o bien estable si $\gamma < 0$ (atractor), o bien inestable si $\gamma > 0$ (repulsor).

Flujo global en el conjunto de trayectorias acotadas

Volvemos al problema perturbativo $x' = x^2 + p(\omega + t\phi) + \alpha$.
Bajo la hipótesis de coercitividad,

$$B_\alpha = \left\{ (\omega, x_0) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t, \omega, x_0, \alpha)| < \infty \right\}$$

es un compacto invariante, cuyos bordes inferior y superior

$$x_1(\omega, \alpha) = \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in B_\alpha \}$$

$$x_2(\omega, \alpha) = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in B_\alpha \}$$

definen soluciones semicontinuas de la ecuación de invarianza.
Por la convexidad, $\gamma(x_1) \leq 0$ y $\gamma(x_2) \geq 0$.



A.I. Alonso, R. Obaya, The structure of the bounded trajectories set of a scalar convex differential equation.
Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A **133** (2003).

Flujo global en el conjunto de trayectorias acotadas

Volvemos al problema perturbativo $x' = x^2 + p(\omega + t\phi) + \alpha$.
Bajo la hipótesis de coercitividad,

$$B_\alpha = \left\{ (\omega, x_0) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R} \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t, \omega, x_0, \alpha)| < \infty \right\}$$

es un compacto invariante, cuyos bordes inferior y superior

$$x_1(\omega, \alpha) = \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in B_\alpha \}$$

$$x_2(\omega, \alpha) = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid (\omega, x) \in B_\alpha \}$$

definen soluciones semicontinuas de la ecuación de invarianza.
Por la convexidad, $\gamma(x_1) \leq 0$ y $\gamma(x_2) \geq 0$.



A.I. Alonso, R. Obya, The structure of the bounded trajectories set of a scalar convex differential equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A* **133** (2003).

Descripción dinámica en el caso $\alpha < \alpha^*$

B_α contiene exactamente dos minimales hiperbólicos que son copia de la base:

$$M_{i,\alpha} = \{(\omega, x_i(\omega, \alpha)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\}, \quad i = 1, 2,$$

es decir, las funciones borde son en este caso continuas en el toro.

Además, $\gamma(x_1) < 0 \Rightarrow$ el minimal inferior es un atractor y $\gamma(x_2) > 0 \Rightarrow$ el minimal superior es un repulsor.

Dinámica global de las soluciones de cada ecuación...

Se produce un fenómeno de encaje entre los conjuntos de trayectorias acotadas a medida que α se aproxima a α^* : si $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*$, entonces $B_{\alpha_2} \subset B_{\alpha_1}$.

Descripción dinámica en el caso $\alpha < \alpha^*$

B_α contiene exactamente dos minimales hiperbólicos que son copia de la base:

$$M_{i,\alpha} = \{(\omega, x_i(\omega, \alpha)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\}, \quad i = 1, 2,$$

es decir, las funciones borde son en este caso continuas en el toro.

Además, $\gamma(x_1) < 0 \Rightarrow$ el minimal inferior es un atractor y
 $\gamma(x_2) > 0 \Rightarrow$ el minimal superior es un repulsor.

Dinámica global de las soluciones de cada ecuación...

Se produce un fenómeno de encaje entre los conjuntos de trayectorias acotadas a medida que α se aproxima a α^* : si $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*$, entonces $B_{\alpha_2} \subset B_{\alpha_1}$.

Descripción dinámica en el caso $\alpha < \alpha^*$

B_α contiene exactamente dos minimales hiperbólicos que son copia de la base:

$$M_{i,\alpha} = \{(\omega, x_i(\omega, \alpha)) \mid \omega \in \mathbb{T}^k\}, \quad i = 1, 2,$$

es decir, las funciones borde son en este caso continuas en el toro.

Además, $\gamma(x_1) < 0 \Rightarrow$ el minimal inferior es un atractor y $\gamma(x_2) > 0 \Rightarrow$ el minimal superior es un repulsor.

Dinámica global de las soluciones de cada ecuación...

Se produce un fenómeno de encaje entre los conjuntos de trayectorias acotadas a medida que α se aproxima a α^* : si $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*$, entonces $B_{\alpha_2} \subset B_{\alpha_1}$.

Descripción dinámica en el caso $\alpha = \alpha^*$

$$x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow (\alpha^*)^-} x_i(\omega, \alpha), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{T}^k.$$

y existe un conjunto **residual** e **invariante** $\Omega \subset \mathbb{T}^k$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Hay un único minimal M_{α^*} en B_{α^*} extensión casi automórfica del toro, que nunca es hiperbólico.

Casos:

(C.1) $x_1 \equiv x_2$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia del toro con $\gamma = 0$.

(C.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^k$ (medida Lebesgue).

Única medida ergódica en B_{α^*} con exponente $\gamma = 0$.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula.

Descripción dinámica en el caso $\alpha = \alpha^*$

$$x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow (\alpha^*)^-} x_i(\omega, \alpha), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{T}^k.$$

y existe un conjunto **residual** e **invariante** $\Omega \subset \mathbb{T}^k$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Hay un único minimal M_{α^*} en B_{α^*} extensión casi automórfica del toro, que **nunca es hiperbólico**.

Casos:

(C.1) $x_1 \equiv x_2$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia del toro con $\gamma = 0$.

(C.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^k$ (medida Lebesgue).

Única medida ergódica en B_{α^*} con exponente $\gamma = 0$.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula.

Descripción dinámica en el caso $\alpha = \alpha^*$

$$x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow (\alpha^*)^-} x_i(\omega, \alpha), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{T}^k.$$

y existe un conjunto residual e invariante $\Omega \subset \mathbb{T}^k$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Hay un único minimal M_{α^*} en B_{α^*} extensión casi automórfica del toro, que nunca es hiperbólico.

Casos:

(C.1) $x_1 \equiv x_2$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia del toro con $\gamma = 0$.

(C.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^k$ (medida Lebesgue).

Única medida ergódica en B_{α^*} con exponente $\gamma = 0$.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula.

Descripción dinámica en el caso $\alpha = \alpha^*$

$$x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow (\alpha^*)^-} x_i(\omega, \alpha), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{T}^k.$$

y existe un conjunto residual e invariante $\Omega \subset \mathbb{T}^k$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Hay un único minimal M_{α^*} en B_{α^*} extensión casi automórfica del toro, que nunca es hiperbólico.

Casos:

(C.1) $x_1 \equiv x_2$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia del toro con $\gamma = 0$.

(C.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^k$ (medida Lebesgue).

Única medida ergódica en B_{α^*} con exponente $\gamma = 0$.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula.

Descripción dinámica en el caso $\alpha = \alpha^*$

$$x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \rightarrow (\alpha^*)^-} x_i(\omega, \alpha), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in \mathbb{T}^k.$$

y existe un conjunto residual e invariante $\Omega \subset \mathbb{T}^k$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Hay un único minimal M_{α^*} en B_{α^*} extensión casi automórfica del toro, que nunca es hiperbólico.

Casos:

(C.1) $x_1 \equiv x_2$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia del toro con $\gamma = 0$.

(C.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{T}^k$ (medida Lebesgue).

Única medida ergódica en B_{α^*} con exponente $\gamma = 0$.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución no continua de la ecuación de invarianza con exponente negativo. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución no continua de la ecuación de invarianza con exponente negativo. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución no continua de la ecuación de invarianza con exponente negativo. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución no continua de la ecuación de invarianza con exponente negativo. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución no continua de la ecuación de invarianza con exponente negativo. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución **no continua** de la ecuación de invarianza con **exponente negativo**. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

(C.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre conjunto de medida nula

Los exponentes son $\gamma(x_1) < 0$ y $\gamma(x_2) > 0$. El minimal M_{α^*} soporta dos medidas ergódicas distintas \Rightarrow no es copia del toro.

Características destacables:

1. M_{α^*} es un minimal casi automórfico obtenido como colisión de toros (minimales casi periódicos).
2. M_{α^*} concentra más de una medida ergódica.
3. En M_{α^*} hay exponentes positivos y negativos.
4. Soluciones sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.
5. Hay un SNA (atractor extraño no caótico): el borde $x_1(\omega)$ define una solución **no continua** de la ecuación de invarianza con **exponente negativo**. En este caso el SNA se encuentra dentro de un minimal casi automórfico. (No siempre es así: en el ejemplo de Keller (1996) el SNA no está en un minimal).
6. Ejemplo de Vinograd (1975) que se adapta a esta situación.

Algunos ejemplos donde se da el caso (C3)



A. Jorba, J.C. Tatjer, C. Núñez, R. Obaya.

Old and new results on strange nonchaotic attractors

Int. J. Bifurcation Chaos **17** (2007).

Contexto Dirac: familia de sistemas lineales 2-dim con traza 0

$$z' = S(\omega + t\phi) z = \begin{pmatrix} a(\omega + t\phi) & b(\omega + t\phi) \\ c(\omega + t\phi) & -a(\omega + t\phi) \end{pmatrix} z, \quad \omega \in \mathbb{T}^k,$$

con $a, b, c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.

Problema espectral asociado $L_\omega z = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) con

$$L_\omega z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (z' - S(\omega + t\phi) z).$$

Si λ^* es un extremo de un intervalo real de la resolvente, y la familia de sistemas $L_\omega z = \lambda^* z$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ está en el caso no uniformemente hiperbólico \Rightarrow situación del caso (C3) en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{P}^1$.

Algunos ejemplos donde se da el caso (C3)



A. Jorba, J.C. Tatjer, C. Núñez, R. Obaya.

Old and new results on strange nonchaotic attractors

Int. J. Bifurcation Chaos **17** (2007).

Contexto Dirac: familia de sistemas lineales 2-dim con traza 0

$$z' = S(\omega + t\phi) z = \begin{pmatrix} a(\omega + t\phi) & b(\omega + t\phi) \\ c(\omega + t\phi) & -a(\omega + t\phi) \end{pmatrix} z, \quad \omega \in \mathbb{T}^k,$$

con $a, b, c : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.

Problema espectral asociado $L_\omega z = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) con

$$L_\omega z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (z' - S(\omega + t\phi) z).$$

Si λ^* es un extremo de un intervalo real de la resolvente, y la familia de sistemas $L_\omega z = \lambda^* z$, $\omega \in \mathbb{T}^k$ está en el caso no uniformemente hiperbólico \Rightarrow situación del caso (C3) en $\mathbb{T}^k \times \mathbb{P}^1$.

Sin embargo, el caso no uniformemente hiperbólico es poco frecuente desde un punto de vista topológico en el espacio de las funciones continuas. Algunos trabajos relacionados:



R. Johnson, R. Fabbri.

On the Lyapounov exponent of certain $SL(2, \mathbf{R})$ -valued cocycles.

Differential Equations Dynam. Systems **3** (1999).



J. Bochi

Genericity of zero Lyapunov exponents.

Ergod. Th. Dyn. Syst. **22** (2002).



J. Bochi, M. Viana.

The Lyapunov exponents of generic volume preserving and symplectic systems.

Ann. Math. **161** (2005).

La situación (C1) para α^* es genérica

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , estrictamente convexa y coercitiva.

Teorema: Existe un conjunto residual $R \subset [0, 1]^k \times \mathcal{C}(\mathbb{T}^k)$ tal que, si $(\phi, p) \in R$, el parámetro $\alpha^*(\omega, \phi, p)$ no depende de $\omega \in \mathbb{T}^k$ y las ecuaciones


$$x' = g(x) + p(\omega + t\phi) + \alpha^*(\phi, p), \quad \omega \in \mathbb{T}^k$$


se encuentran en el caso (C.1), es decir,

$$x_1(\omega, \alpha^*(p)) = x_2(\omega, \alpha^*(p)) \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{T}^k$$


y el minimal $B_{\alpha^*(p)}(p) = M_{\alpha^*(p)}$ es una copia del toro con exponente $\gamma = 0$.

Este resultado resulta interesante en contraposición con algunos resultados de genericidad del exponente de Lyapunov positivo en clases de funciones diferenciables:

 R. Johnson, R. Fabbri, Genericity of exponential dichotomy for two-dimensional differential systems.
Ann. Mat. Pura Appl. **4** (2000).

 R. Fabbri, On the Lyapunov exponent and exponential dichotomy for the quasi-periodic Schrödinger operator.
Bollettino U.M.I. **8** (2002).

Existencia de SNAs en difeomorfismos del círculo forzados quasi-periódicamente: *the existence of SNA in qpf circle maps is a phenomom which is both robust and non-degenerate:*

 T. Jäger, Strange non-chaotic attractors in quasiperiodically forced circle maps, Preprint (2007).

Otros trabajos recientes relacionados

Para familias escalares $x' = f(\omega \cdot t, x, \alpha)$, $\omega \in \Omega$, ($\alpha \in \mathbb{R}$), sobre un flujo $(\Omega, \omega \cdot t)$ minimal y únicamente ergódico, estudio de bifurcaciones silla-nodo, transcítica y pitchfork.

Determinan condiciones que garantizan único minimal copia de la base en los valores de bifurcación.



C. Núñez, R. Obaya, A non-autonomous bifurcation theory for deterministic scalar differential equations

Discrete Contin. Dynam. Systems **9** (2008).

Generación de SNAs mediante la colisión de curvas invariantes en familias paramétricas de sistemas forzados quasi-periódicamente:



T. Jäger, The creation of strange non-chaotic attractors in non-smooth saddle-node bifurcations.

To appear in *Memoirs of the AMS* (2008).

Otros trabajos recientes relacionados

Para familias escalares $x' = f(\omega \cdot t, x, \alpha)$, $\omega \in \Omega$, ($\alpha \in \mathbb{R}$), sobre un flujo $(\Omega, \omega \cdot t)$ minimal y únicamente ergódico, estudio de bifurcaciones silla-nodo, transcítica y pitchfork.

Determinan condiciones que garantizan único minimal copia de la base en los valores de bifurcación.



C. Núñez, R. Obya, [A non-autonomous bifurcation theory for deterministic scalar differential equations](#)

Discrete Contin. Dynam. Systems **9** (2008).

Generación de SNAs mediante la colisión de curvas invariantes en familias paramétricas de sistemas forzados quasi-periódicamente:



T. Jäger, [The creation of strange non-chaotic attractors in non-smooth saddle-node bifurcations.](#)

To appear in *Memoirs of the AMS* (2008).