

22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

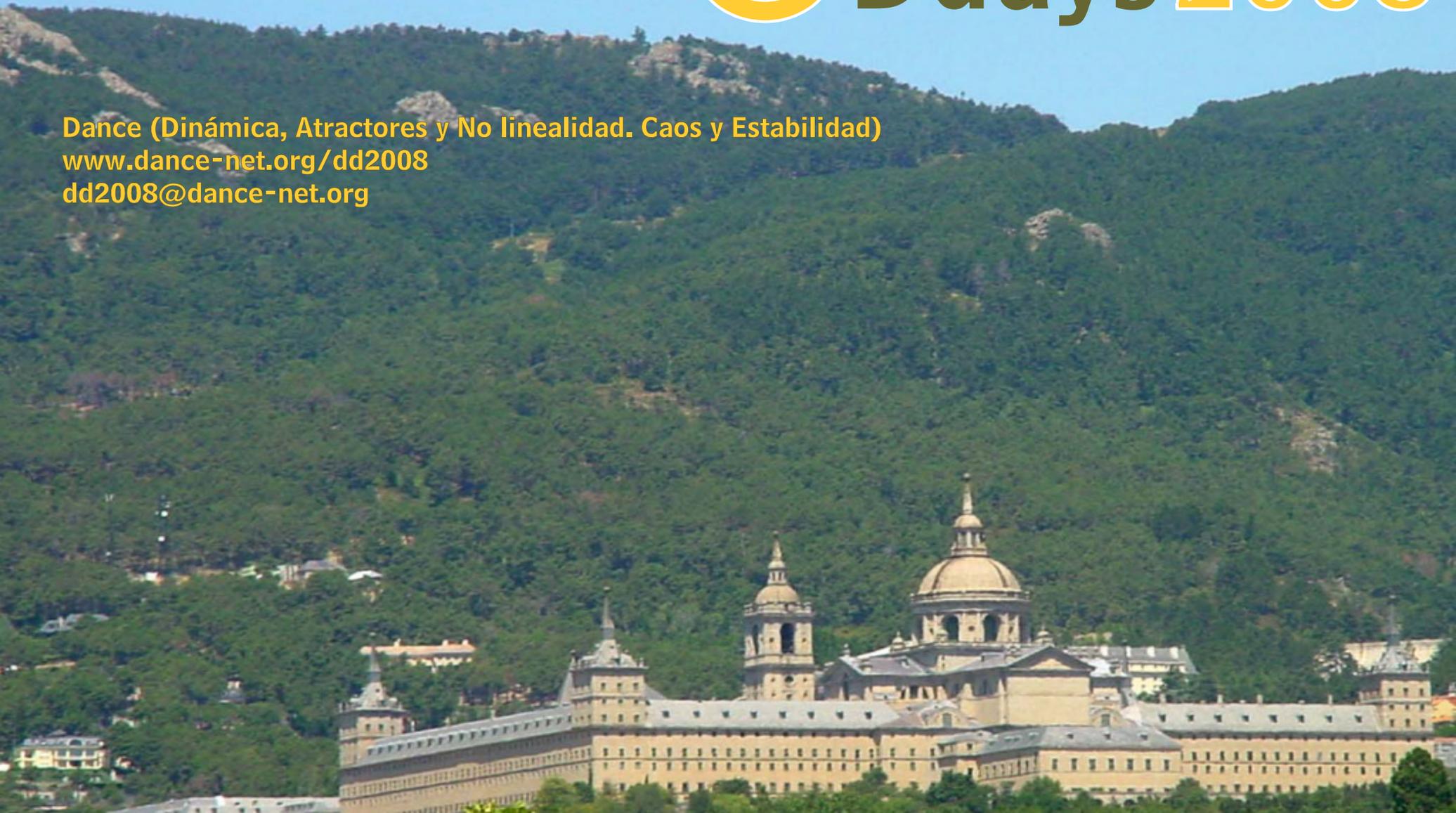
The logo for Ddays 2008 features a stylized lowercase 'd' in yellow with a white outline. The 'd' is composed of a vertical bar on the right and a circular shape on the left. Inside the circle, there are two concentric white circles, creating a target-like effect.

Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)

www.dance-net.org/dd2008

dd2008@dance-net.org



Bifurcaciones en convección con viscosidad variable y su dependencia con la relación de aspecto

A.M.Mancho

Instituto de Ciencias Matemáticas

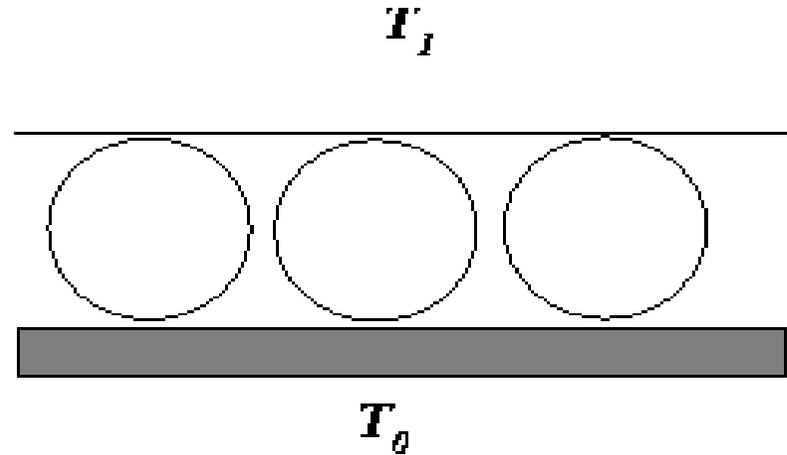
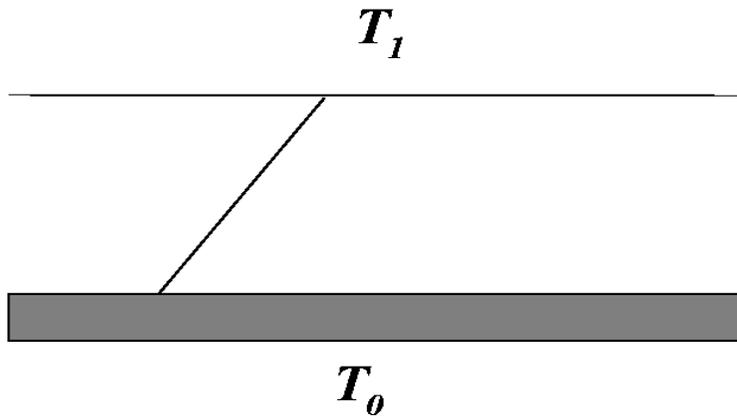
CSIC

Trabajo conjunto con:

F. Plá , H. Herrero, Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha,

INTRODUCCIÓN

Convección Térmica



Para $DT > DT_c$ la solución conductiva bifurca y aparecen nuevas soluciones

INTRODUCCIÓN

Convección Térmica

La convección de fluidos Newtonianos se describe mediante:

Ecuación de Navier Stokes con viscosidad constante (aproximación Boussinesq):

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left(-\frac{1}{r_o} \nabla p + \mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{u} \right) - \frac{r}{r_o} g \vec{e}_z \quad r = r_o (1 - \alpha (\Theta - \Theta_o))$$

Ecuación del Calor:

$$\partial_t \Theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = K \nabla^2 \Theta$$

Condición de incompresibilidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

INTRODUCCIÓN

Convección en el Manto Terrestre

La convección térmica en el *manto superior* es la responsable de la dinámica de las placas continentales

La física del manto incluye propiedades como:

- ✓ Grandes variaciones en la viscosidad, $\eta(\Theta)$, $\eta(z)$
- ✓ Variaciones en la conductividad térmica, $K(\Theta)$, $K(z)$
- ✓ Ecuaciones constitutivas que formulen la correcta reología del manto

Estas propiedades no se contemplan en el problema clásico de convección.

INTRODUCCIÓN

Convección en el Manto Terrestre

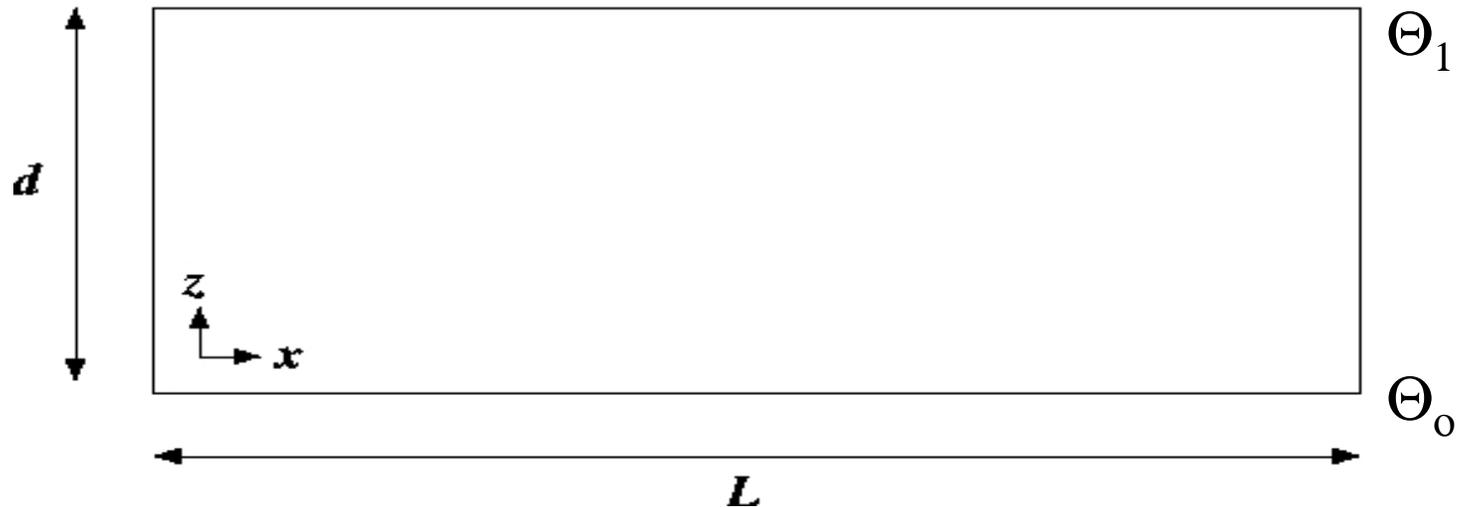
En este trabajo consideramos que la viscosidad depende temperatura:

$$\mathbf{u}(\Theta) = \mathbf{u}_o \exp(-g(\Theta - \Theta_o))$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{r_o} \nabla p + \text{div} \left(\mathbf{u}(\Theta) (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right) \\ -\frac{r}{r_o} g \vec{e}_z \end{array} \right)$$

EL SISTEMA FÍSICO



Dominio finito en \mathbb{R}^2

Las condiciones de contorno son:

$$\Theta(z=0) = \Theta_0, \quad \Theta(z=d) = \Theta_1$$

$$\partial_x \Theta(x=0) = \partial_x \Theta(x=L) = 0,$$

$$\mathbf{u}(z=0) = 0, \quad \partial_z u_x(z=d) = u_z = 0,$$

$$\partial_x u_z(x=\pm L) = u_x = 0$$

ECUACIONES ADIMENSIONALIZADAS

Ecuación del calor

$$\partial_t \Theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = \nabla^2 \Theta$$

Ecuación continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Ecuación del movimiento

$$\frac{1}{\text{Pr}} (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \left(-\nabla p + \text{div} \left(\frac{\mathbf{u}(\Theta)}{u_o} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right) \right) + R \Theta \vec{e}_z$$

Donde se considera:

$$\frac{\mathbf{u}(\Theta)}{u_o} = \exp(-mR\Theta), \quad m = 0, \quad m = 0.0862$$

Para $m=0.0862$, el contraste de viscosidad $\frac{\mathbf{u}(\Theta)}{u_o} = 10^{-3}$

ECUACIONES ADIMENSIONALIZADAS

La nueva estructura de la ecuación del movimiento añade complicados términos no lineales:

$$\left(\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{u}^{(\Theta)}}{u_o} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right) \right) =$$
$$\left(\begin{array}{l} \partial_x \left(2 \frac{u^{(\Theta)}}{u_o} (\partial_x u_x) \right) + \partial_z \left(\frac{u^{(\Theta)}}{u_o} (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \right) \\ \partial_x \left(\frac{u^{(\Theta)}}{u_o} (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \right) + \partial_z \left(2 \frac{u^{(\Theta)}}{u_o} (\partial_x u_x) \right) \end{array} \right)$$

En la nueva versión de ecuaciones adimensionales el dominio se transforma en:

$$z \in [0, 1], \quad x \in [0, \Gamma = L / d]$$

Donde Γ es la relación de aspecto.

SOLUCIONES ESTACIONARIAS

El sistema de ecuaciones descrito presenta soluciones *estacionarias* en las que cualquier campo general X cumple

$$\partial_t X = 0 ,$$

Solución estacionaria trivial

$$\mathbf{u} = 0 , \quad \Theta = -z$$

Esta solución es *estable* sólo para pequeños valores de R .

$$R < R_c$$

Por encima del umbral pueden aparecer nuevas soluciones (no triviales) estacionarias:

$$\partial_t X = 0 ,$$

O bien dependientes del tiempo.

OBJETIVO: *Determinar las ramas de soluciones estacionarias y la secuencia de puntos de bifurcación*

LA ESTABILIDAD LINEAL

Perturbamos una solución estacionaria X^b :

$$X(x, z) = X^b(x, z) + x(x, z) e^{lt}$$

En el limite de fluidos muy viscosos $Pr = \infty$

Las ecuaciones linealizadas son:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$0 = -\partial_x P + L_{1,1}(\Theta_b) u_x + L_{1,2}(\Theta_b) u_z + L_{1,3}(\Theta_b, u_x^b, u_z^b) \Theta$$

$$0 = -\partial_z P + L_{2,1}(\Theta_b) u_x + L_{2,2}(\Theta_b) u_z + L_{2,3}(\Theta_b, u_x^b, u_z^b) \Theta$$

$$I \Theta = -\mathbf{u}^b \cdot \nabla \Theta - \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta^b + \Delta \Theta$$

Donde:

$$L_{i,j} \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3)$$

Son operadores lineales con coeficientes no constantes.

LA ESTABILIDAD LINEAL

Caso conductivo

Para la solución conductiva trivial $\mathbf{u} = 0$, $\Theta = -z$

La estructura de la perturbación se simplifica a:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_z \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x^b(z) \\ u_z^b(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} e^{ik_x x + I t}$$

La condición de compatibilidad proporciona una relación de dispersión:

$$I = I(R, k_x)$$

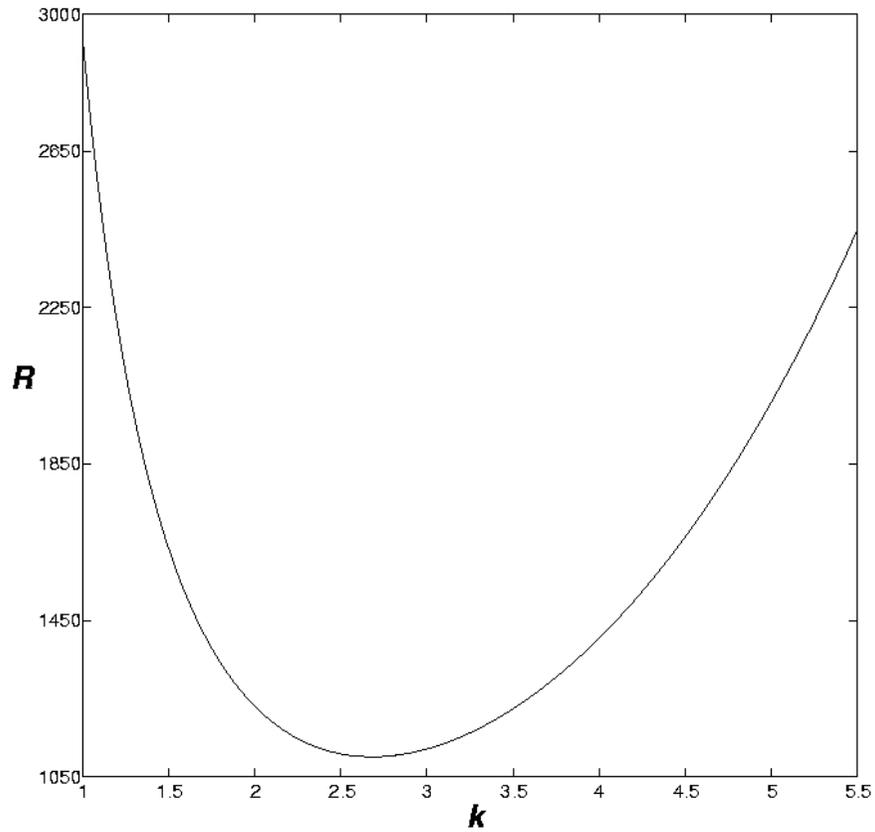
La condición crítica $I=0$ conduce a la expresión

$$R = R(k_x)$$

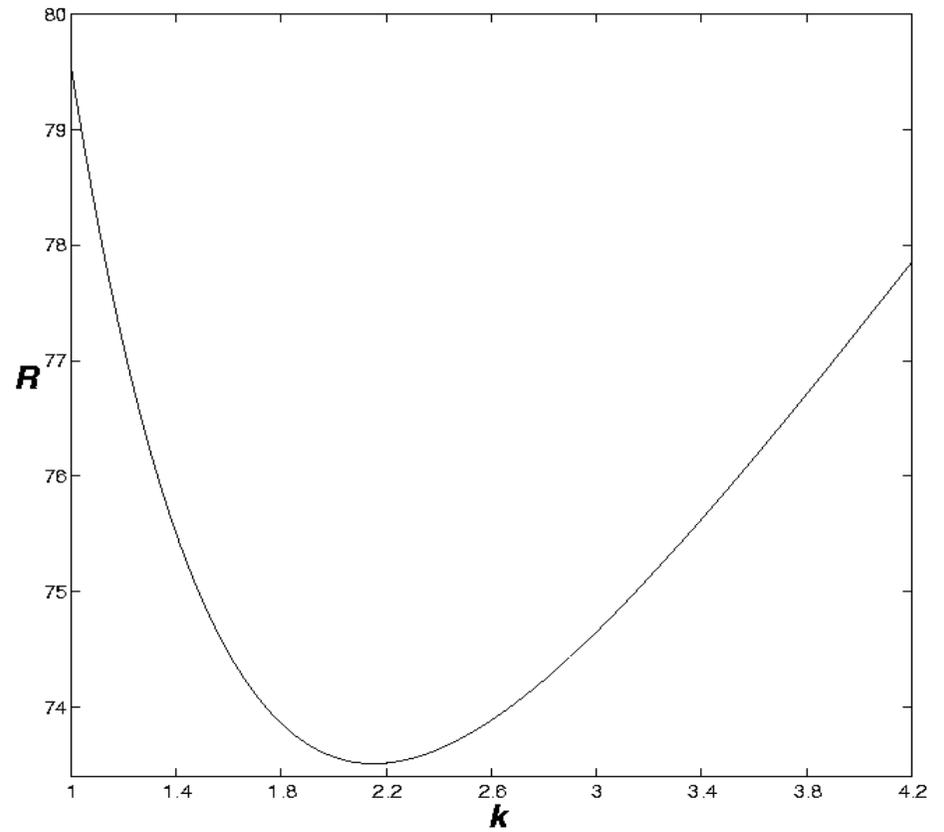
LA ESTABILIDAD LINEAL

Curvas de estabilidad critica

$m=0$



$m=0.0862$

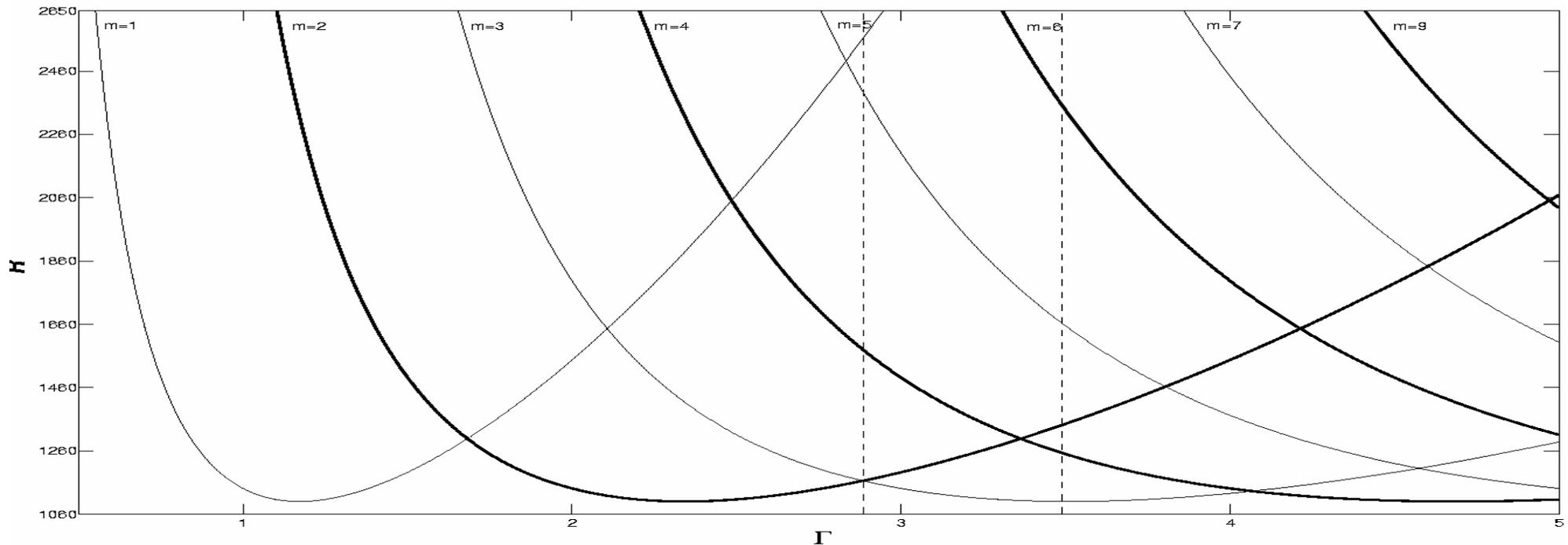


LA ESTABILIDAD LINEAL

En una celda finita deben cumplirse las condiciones de contorno laterales, es decir k_x no es arbitrario

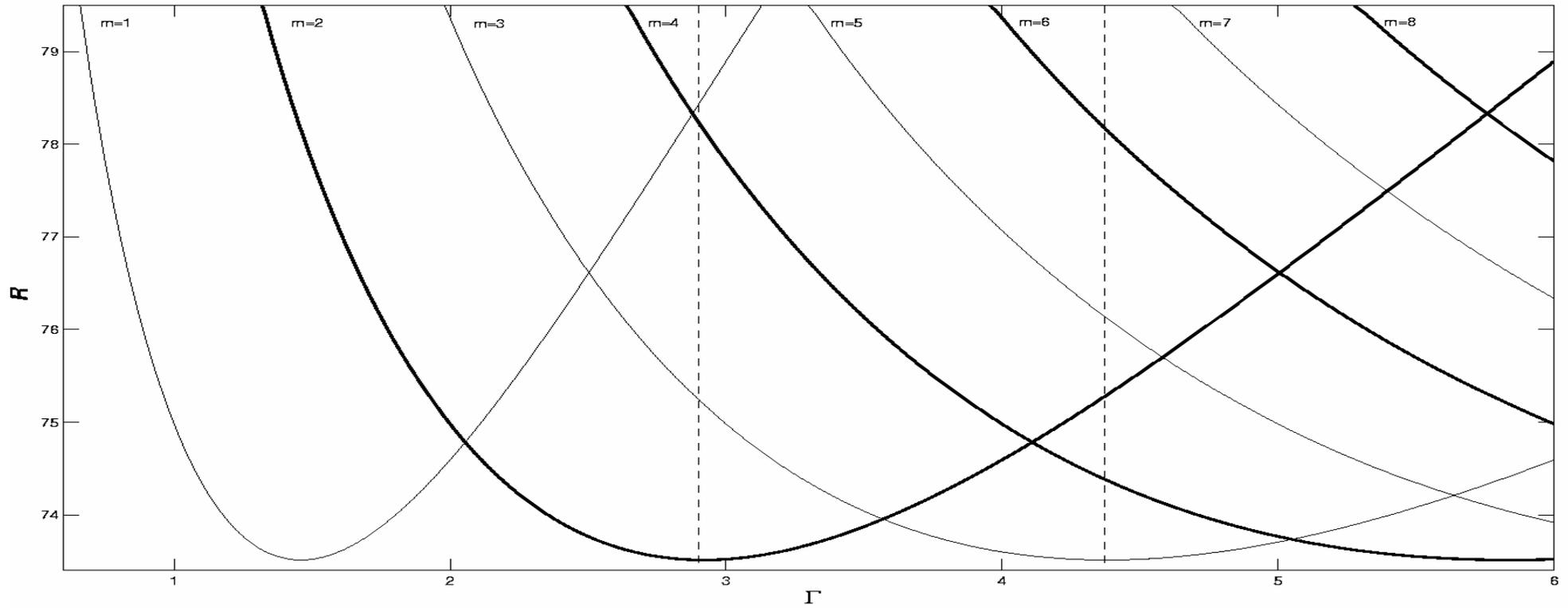
$$k_x = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$m=0$



LA ESTABILIDAD LINEAL

$m=0.0862$



EL MÉTODO NUMÉRICO

Calculamos las soluciones estacionarias no triviales

Para ello se resuelven las ecuaciones estacionarias con un método iterativo tipo *Newton-Raphson* :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^{s-1}, \quad p = p^s + p^{s-1}, \quad \Theta = \Theta^s + \Theta^{s-1}$$

En donde las ecuaciones y condiciones de contorno se linealizan en cada paso s , en torno a las soluciones obtenidas en el paso $s-1$. El funcionamiento del método requiere una buena condición de partida

Los campos incógnita se desarrollan en una base de polinomios de *Chebyshev*,

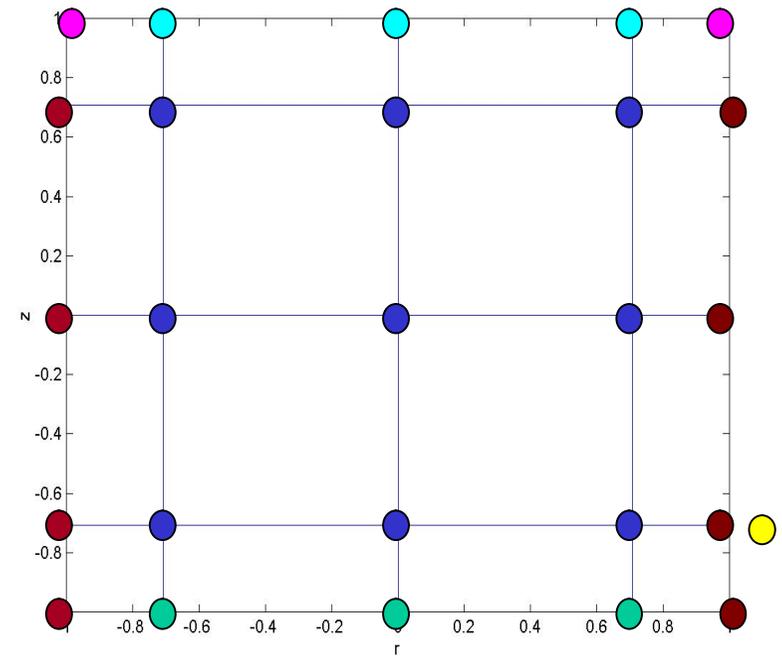
$$x(x, z) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{M-1} x_{ln} T_l(x) T_n(z)$$

EL MÉTODO NUMÉRICO

Las ecuaciones básicas estacionarias se evalúan en los puntos de colocación de *Gauss Lobato* ●

Las condiciones de contorno siguen las reglas:

- $z = 0,$ $\mathbf{u} = 0,$ $\Theta = 0,$ ecuación cont ●
- $z = 1,$ $u_z = 0,$ $\Theta - 1 = 0,$ $\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$ ●
- $z = 1,$ ecuación de mov. 2 ●⁺ ●
- $x = 0, \Gamma$ $u_x = \partial_x u_z = 0,$ $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$ ●⁺ ●
- $x = 0, \Gamma$ ecuación de mov. 1 ●



Con estas reglas se obtienen $4xLxM$ ecuaciones e incógnitas.

EL MÉTODO NUMÉRICO

El análisis de estabilidad lineal de soluciones no triviales admite el mismo esquema discreto de expansión en polinomios de Chebyshev que conduce a un *problema de autovalores generalizado* $Aw = \lambda Bw$

Convergencia

El umbral de convergencia para la solución conductiva $m=3$, $G=4.415$, $m=0.0862$, $R_c=73.51$

El obtenido con distintas expansiones:

x-coordenada (L)

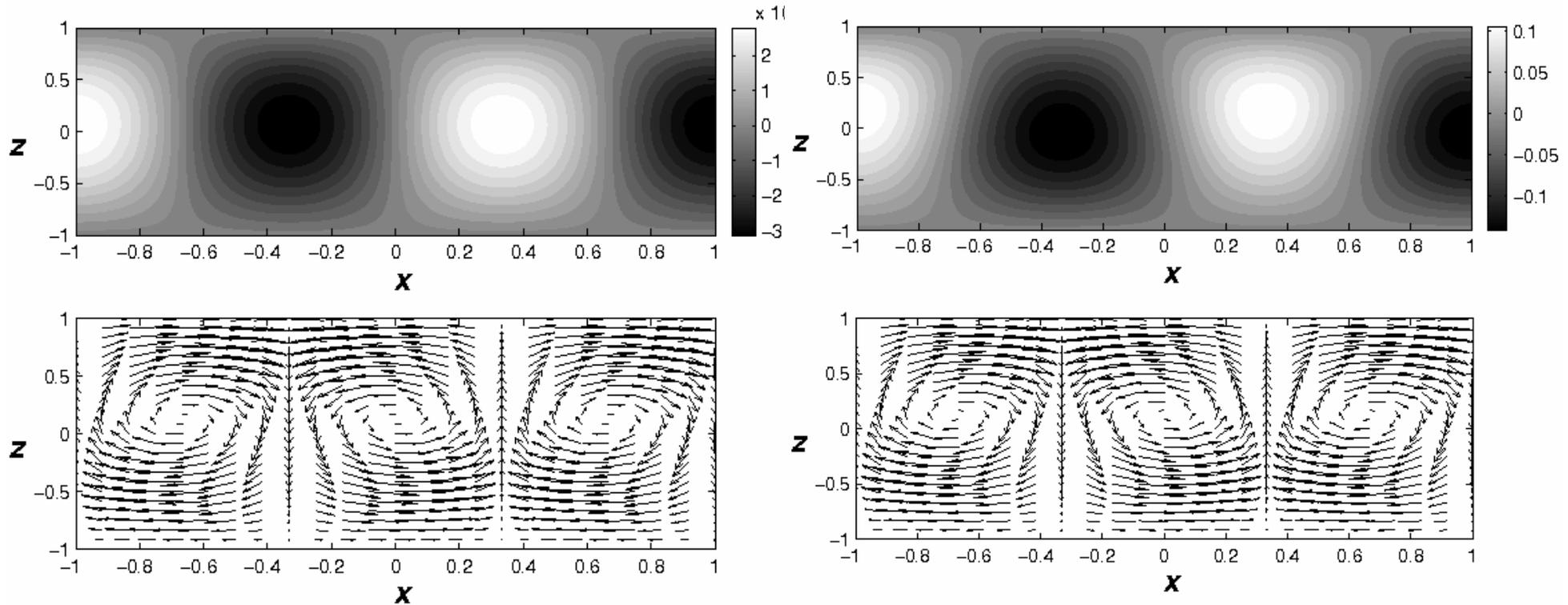
	14	16	18	20
12	74.09	74.09	74.09	74.09
14	73.52	73.52	73.52	73.52
16	73.64	73.64	73.64	73.64

$L \times N = 18 \times 14$

CONTINUACIÓN DE RAMAS

La solución conductiva pierde su estabilidad y la nueva solución tiende a desestabilizarse con la forma de las autofunciones inestables.

$G=3.495$, $m=0$ $R_c=1153$



CONTINUACIÓN DE RAMAS

Aprovechamos esto para calcular las ramas de soluciones en los puntos de bifurcación:

$$R > R_c$$

$$\mathbf{u}^{s=0} = \mathbf{u}^b + \hat{\mathbf{u}}, \quad p^{s=0} = p^b + \hat{p}, \quad \Theta^{s=0} = \Theta^b + \hat{\Theta}$$

$(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{\Theta})$ son las autofunciones más inestables en $R=R_c$

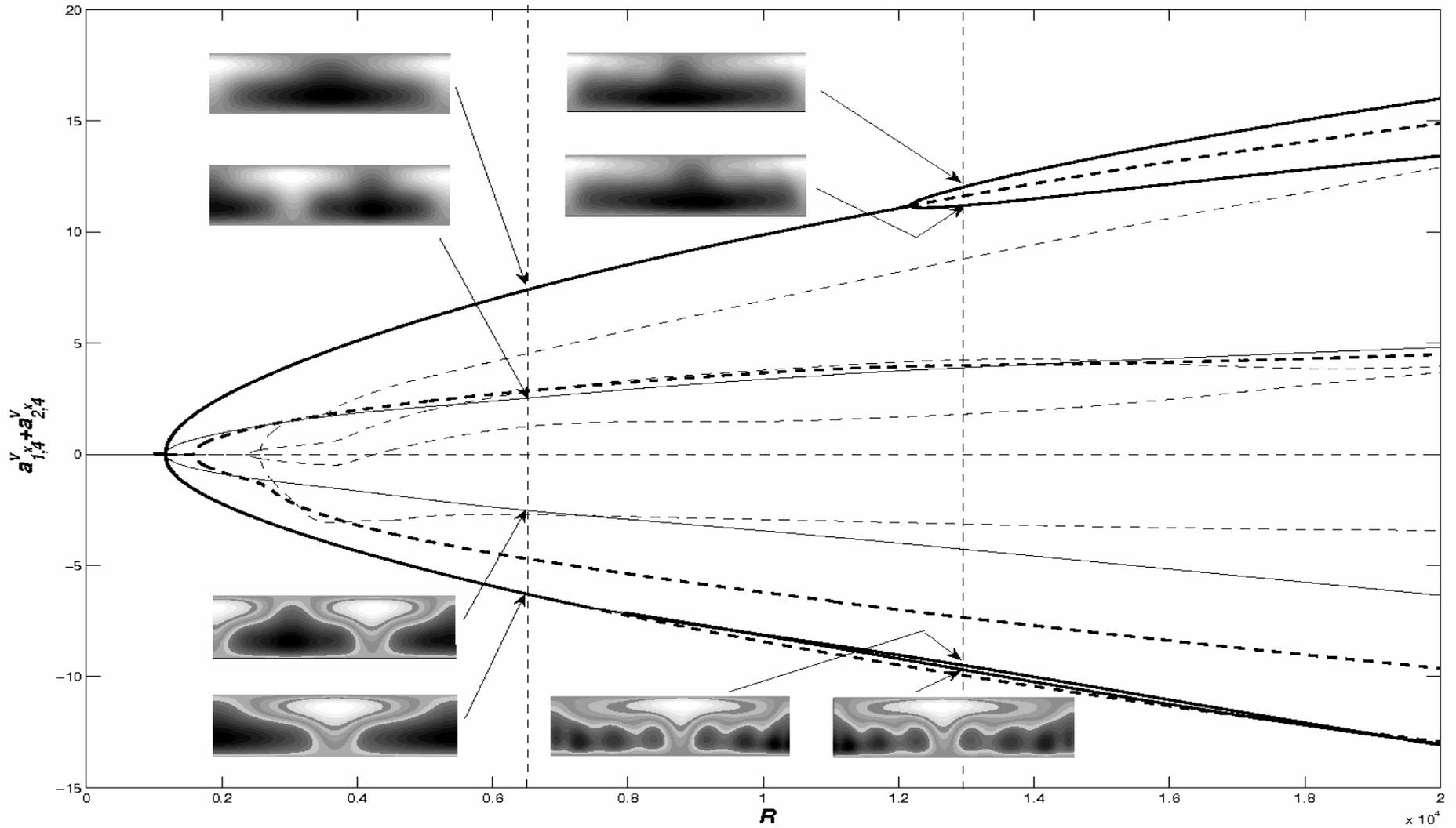
Para representar los puntos de equilibrio, en la expansión del campo de velocidad

$$u_x(x, z) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{M-1} a_{l,n}^{u_x} T_l(x) T_n(z)$$

Elegimos $a_{14}^{u_x} + a_{24}^{u_x}$

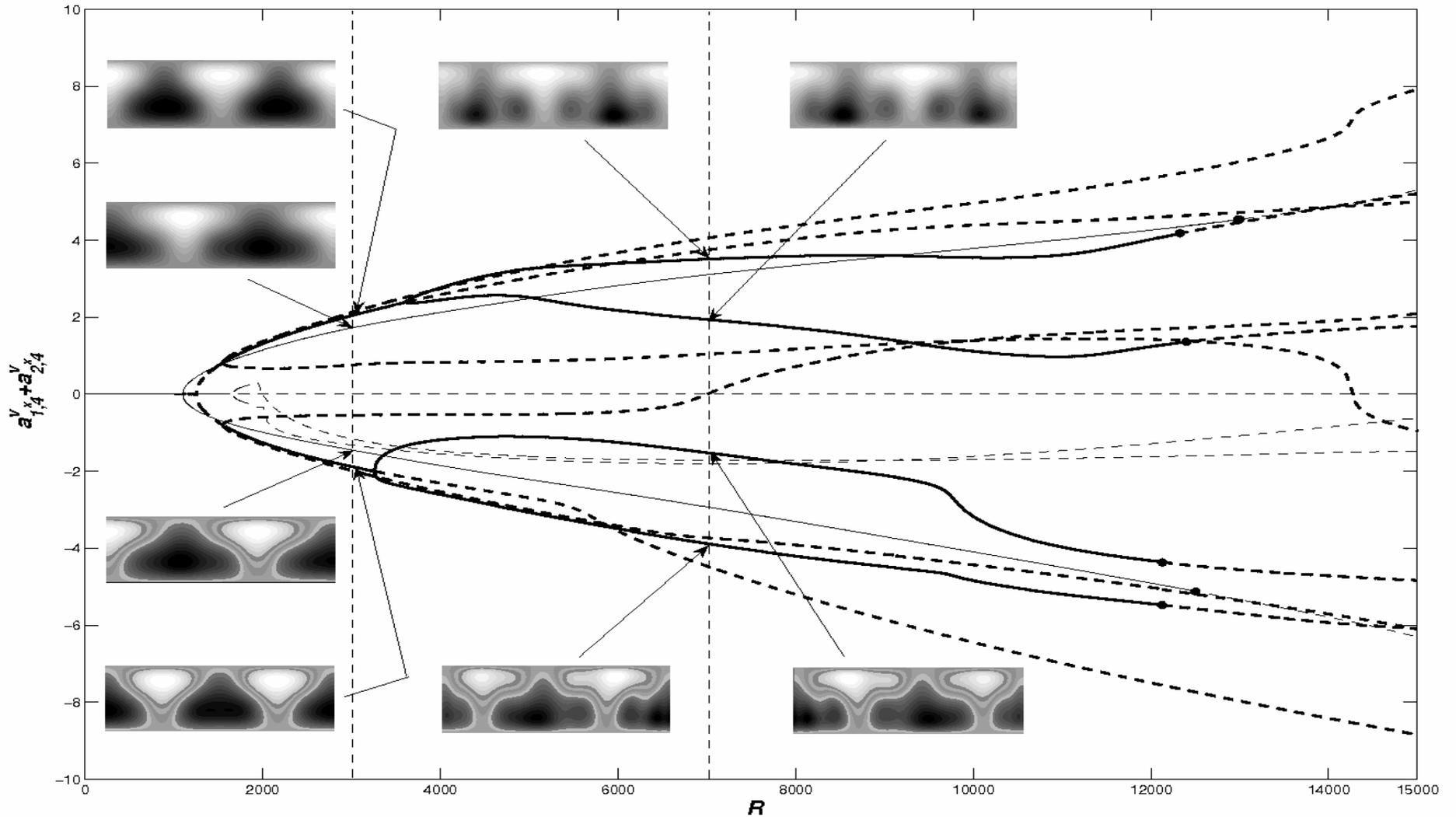
RESULTADOS

$m=0$, $G=2.885$



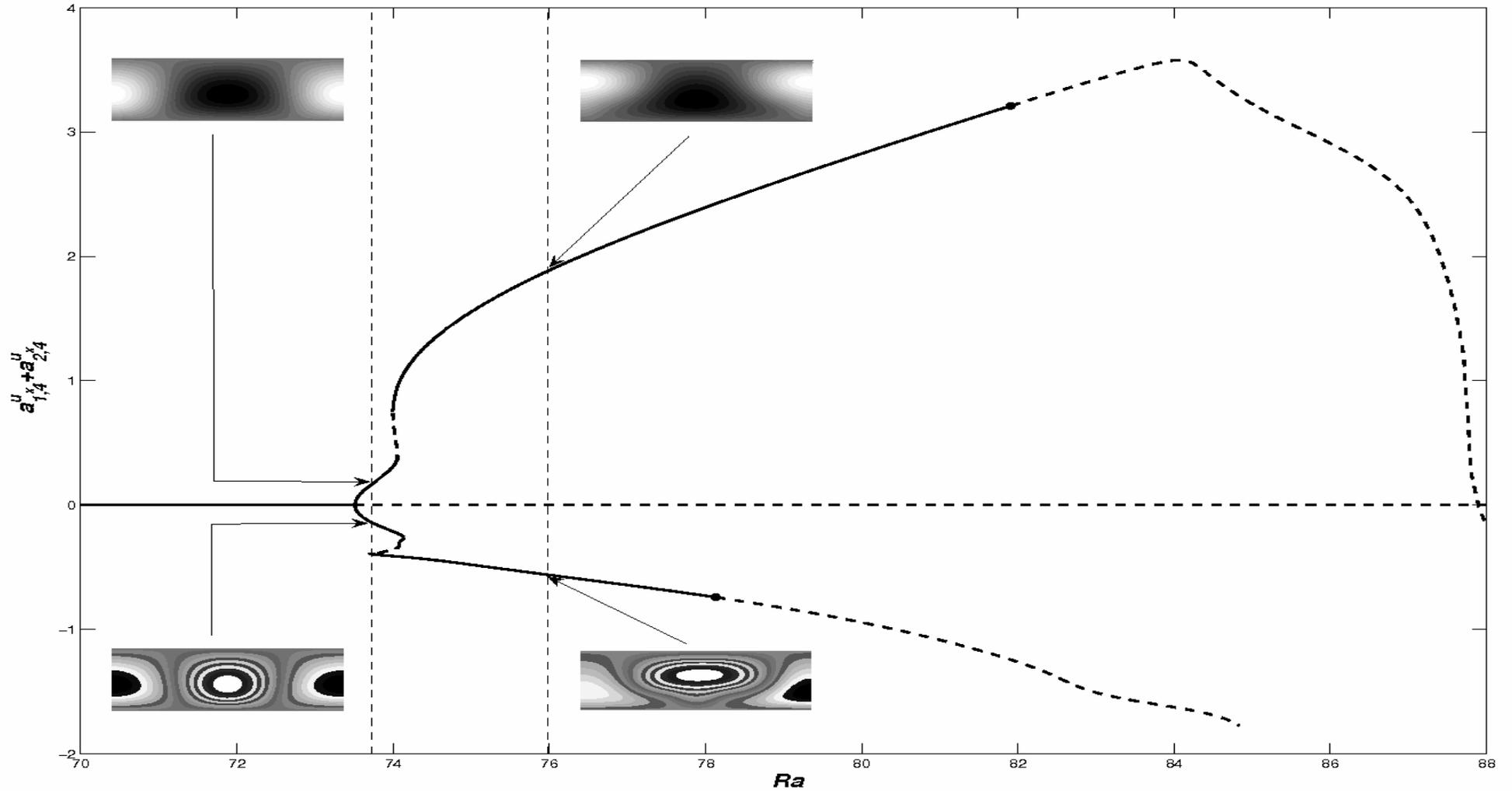
RESULTADOS

$m=0, G=3.495$



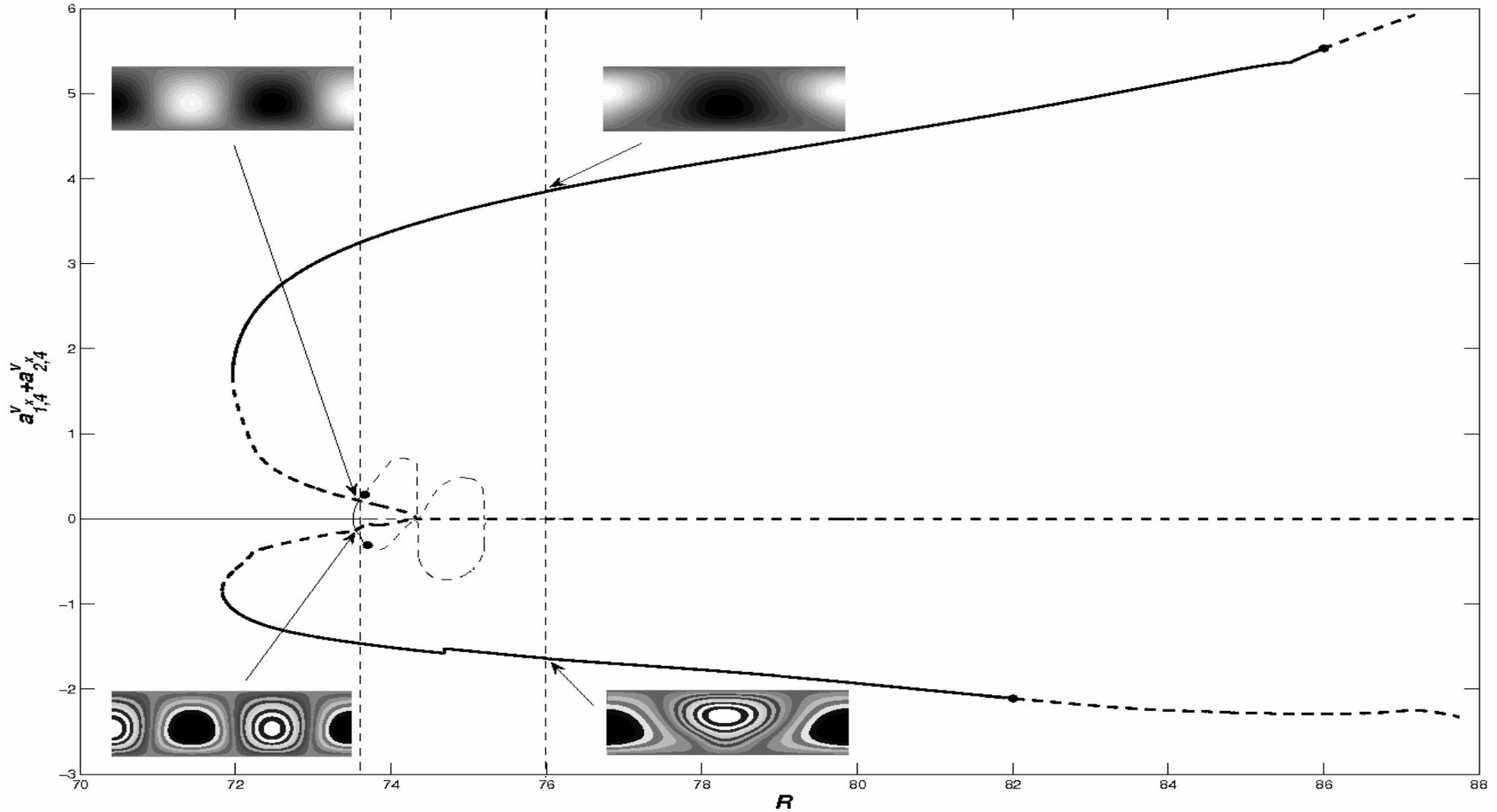
RESULTADOS

$m=0.0862$, $G=2.936$



RESULTADOS

$m=0.0862$, $G=4.415$



CONCLUSIONES

- ✓ El análisis de bifurcaciones en un problema de convección de interés geofísico permite encontrar regiones de multiestabilidad. Las soluciones son en cierto sentido más completas que las obtenidas por evolución temporal
- ✓ Encontramos límites en los que la convección estacionaria.
- ✓ El fluido con viscosidad dependiente de la temperatura presenta numerosas bifurcaciones subcríticas. Se encuentran soluciones estables por debajo del umbral de bifurcación.
- ✓ La relación de aspecto altera la estructura de las soluciones encontradas. Típicamente son más complejas en relaciones de aspecto grandes.