

22, 23 y 24 de Octubre de 2008. El Escorial (Madrid)

Cuarta reunión de la red temática Dance

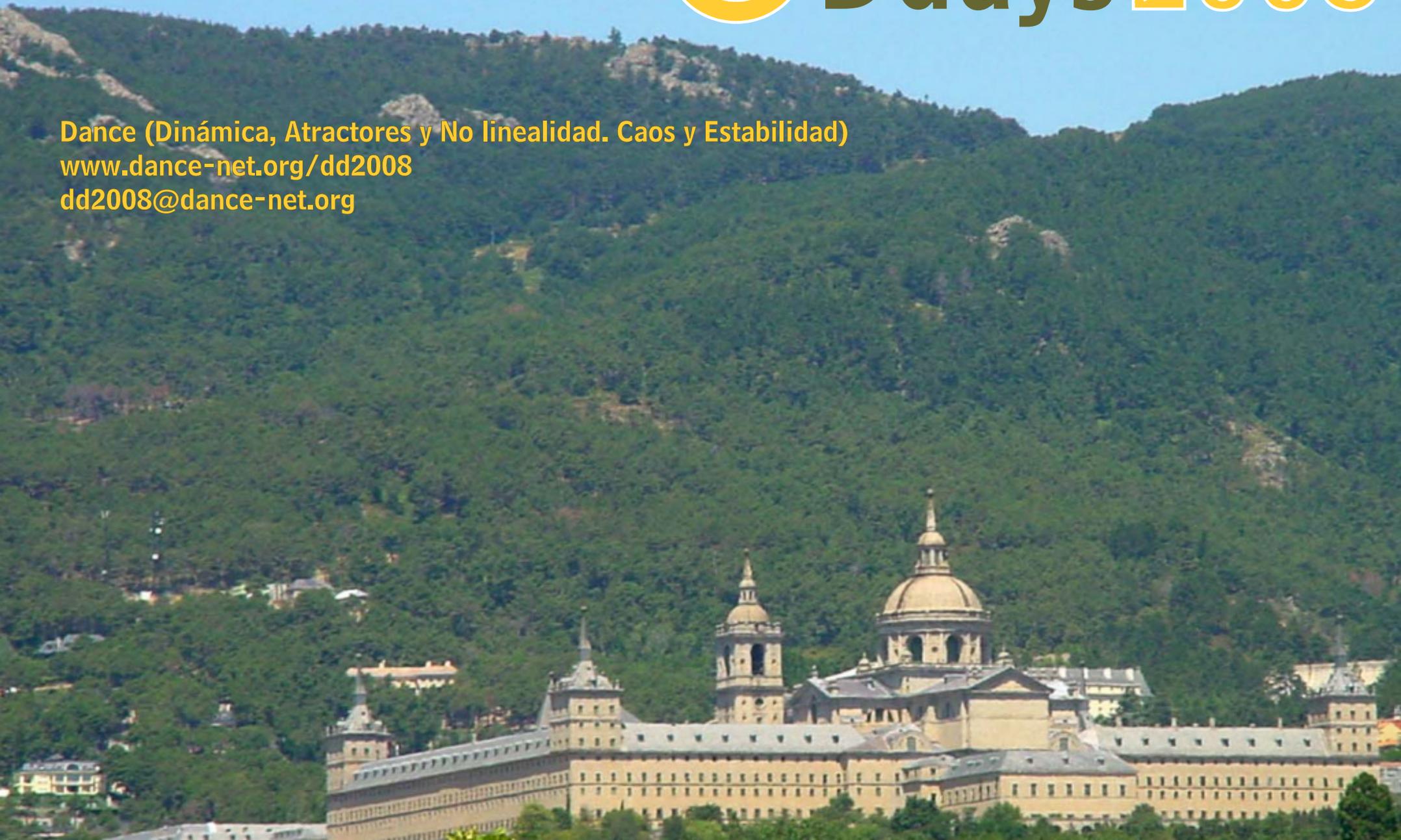
The logo for Ddays 2008 features a stylized lowercase 'd' in yellow with a white outline. Inside the 'd' is a yellow circle with a white outline, resembling a target or a stylized 'o'. To the right of this symbol, the word 'Ddays' is written in a bold, dark grey sans-serif font, and '2008' is written in a yellow sans-serif font with a white outline.

# Ddays 2008

Dance (Dinámica, Atractores y No linealidad. Caos y Estabilidad)

[www.dance-net.org/dd2008](http://www.dance-net.org/dd2008)

[dd2008@dance-net.org](mailto:dd2008@dance-net.org)



# *Aproximaciones de la variedad central para una vela solar en el sistema Tierra - Sol*

Ddays 2008, El Escorial

Ariadna Farrés & Àngel Jorba

`ari@maia.ub.es & angel@maia.ub.es`

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi  
Universitat de Barcelona

## ¿ Qué es una vela solar ?

- Una **vela solar** es un nuevo sistema de propulsión. El impacto de los fotones emitidos por el Sol y su reflexión sobre la vela aceleran la nave espacial.
- Supondremos que la superficie de la vela es plana y perfectamente reflectante. Entonces la fuerza de la vela es la dirección normal a la superficie de ésta.

$$\vec{F}_{vela} = \beta \frac{1 - \mu}{r_{PS}} \langle \vec{r}_S, \vec{n} \rangle^2 \vec{n}.$$

- La fuerza de la vela estará parametrizada por dos ángulos ( $\alpha$  y  $\delta$ ) que definen su orientación, y la constante  $\beta$  que nos mide la efectividad de la vela.

# Ecuaciones del Movimiento

Estamos interesados en el movimiento de una vela solar en el sistema Tierra - Sol. Hemos usado el RTBP añadiendo la fuerza de la radiación solar para modelar la dinámica de la vela solar.

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1 - \mu) \frac{x - \mu}{r_{PS}^3} - \mu \frac{x + 1 - \mu}{r_{PE}^3} + \beta \frac{1 - \mu}{r_{PS}^2} \langle \vec{r}_S, \vec{n} \rangle^2 n_x,$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \left( \frac{1 - \mu}{r_{PS}^3} + \frac{\mu}{r_{PE}^3} \right) y + \beta \frac{1 - \mu}{r_{PS}^2} \langle \vec{r}_S, \vec{n} \rangle^2 n_y,$$

$$\ddot{z} = - \left( \frac{1 - \mu}{r_{PS}^3} + \frac{\mu}{r_{PE}^3} \right) z + \beta \frac{1 - \mu}{r_{PS}^2} \langle \vec{r}_S, \vec{n} \rangle^2 n_z,$$

donde,

$$n_x = \cos(\phi(x, y) + \alpha) \cos(\psi(x, y, z) + \delta),$$

$$n_y = \sin(\phi(x, y) + \alpha) \cos(\psi(x, y, z) + \delta),$$

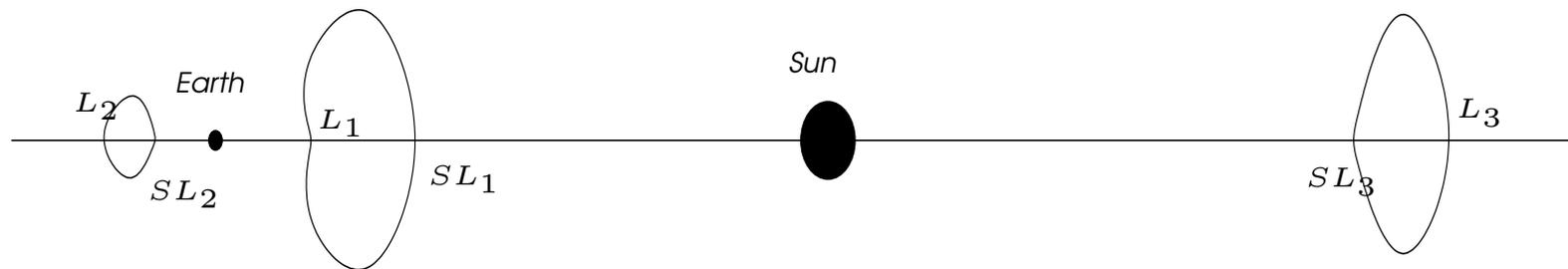
$$n_z = \sin(\psi(x, y, z) + \delta).$$

## Puntos de Equilibrio

- El RTBP tiene 5 puntos de equilibrio ( $L_i$ ). Para  $\beta$  pequeño, estos 5 puntos son reemplazados por 5 familias de puntos de equilibrio parametrizadas por los ángulos  $\alpha$  y  $\delta$ .
- A medida que  $\beta$  crece, algunas de estas familias se unen. Luego los puntos de equilibrio están en dos superficies,  $S_1$  y  $S_2$ . Se puede ver que  $S_1$  es difeomorfa a una esfera y  $S_2$  es difeomorfa a un toro alrededor del Sol.

## Un caso particular

- Desde este momento fijamos  $\alpha = 0$  y dejamos  $\delta$  libre. En particular, sólo consideramos variaciones verticales en la orientación de la vela.



- En este caso tenemos tres familias de puntos fijos en el plano  $y = 0$ . Uno puede ver que todos estos puntos de equilibrio son del tipo centro  $\times$  centro  $\times$  silla.

- Nuestro objetivo es entender la dinámica en un entorno del punto de equilibrio. En particular, queremos encontrar trayectorias que permanezcan cerca del punto de equilibrio.
- Para ello haremos la reducción a la variedad central.
- Calcularemos el grafo de la variedad central alrededor del punto de equilibrio, sin usar el carácter Hamiltoniano del sistema.

# Reducción a la Variedad Central

Con un cambio lineal adecuado, las ecuaciones alrededor del punto de equilibrio se pueden escribir como,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y), & x \in \mathbb{R}^4, \\ \dot{y} &= By + g(x, y), & y \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

donde  $A$  es una matriz elíptica,  $B$  es hiperbólica, y  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  y  $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$ .

- Queremos encontrar  $y = v(x)$ , con  $v(0) = 0$ ,  $Dv(0) = 0$ , la expresión local de la variedad central.
- El flujo restringido sobre la variedad central vendrá dado por,

$$\dot{x} = Ax + f(x, v(x))$$

# Reducción a la Variedad Central

Para encontrar  $y = v(x)$  sustituimos esta expresión en las ecuaciones. Entonces  $v(x)$  debe satisfacer,

$$Dv(x)Ax - Bv(x) = g(x, v(x)) - Dv(x)f(x, v(x)). \quad (1)$$

Tomamos,

$$v(x) = \left( \sum_{|k| \geq 2} v_{1,k} x^k, \sum_{|k| \geq 2} v_{2,k} x^k \right), \quad k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^4,$$

expansión en serie de potencias.

Entonces la parte izquierda de la ecuación es un operador lineal con respecto a  $v(x)$  y la parte derecha es no lineal.

# Reducción a la Variedad Central

La parte de la izquierda de la ecuación (1),

$$L(x) = Dv(x)Ax - Bv(x),$$

diagonaliza si  $A$  y  $B$  son diagonales.

En particular, si tomamos  $A = \text{diag}(i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2)$  y  $B = \text{diag}(\lambda, -\lambda)$ ,

$$L(x) = \begin{pmatrix} \sum_{|k| \geq 2} (i\omega_1 k_1 - i\omega_1 k_2 + i\omega_2 k_3 - i\omega_2 k_4 - \lambda) v_{1,k} x^k \\ \sum_{|k| \geq 2} (i\omega_1 k_1 - i\omega_1 k_2 + i\omega_2 k_3 - i\omega_2 k_4 + \lambda) v_{2,k} x^k \end{pmatrix}.$$

# Reducción a la Variedad Central

La parte de la derecha de la ecuación (1),

$$g(x, v(x)) - Dv(x)f(x, v(x)),$$

la expresaremos como,

$$h(x) = \left( \sum_{|k| \geq 2} h_{1,k} x^k, \sum_{|k| \geq 2} h_{2,k} x^k \right)^T,$$

donde los  $h_{i,k}$  dependen de los  $v_{i,j}$  de una manera conocida ( $i = 1, 2$ ).

- Se puede ver que para un grado fijo  $|k| = n$ , los  $h_{i,k}$  dependen sólo de los  $v_{i,j}$  tales que  $|j| < n$ .

# Reducción a la Variedad Central

Igualando grado a grado los términos de la derecha con los de la izquierda de la ecuación (1) encontraremos los valores de los  $v_{i,j}$  de manera iterativa, resolviendo un sistema diagonal para cada grado.

Observaciones:

- Es importante tener una manera eficaz de encontrar los  $h_{i,k}$  para poder llegar a órdenes altos.
- No es recomendable expandir  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$ , y luego componer con  $y = v(x)$ . Hay que buscar maneras alternativas, más eficaces en cuestión de tiempo computacional.
- Las matrices  $A$  y  $B$  no tienen por qué ser diagonales, aunque si no lo están tendremos que resolver un sistema lineal grande a cada paso.

## Caso Particular ( $\alpha = \delta = 0$ )

El campo se puede expresar como,

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + (1 + 2c_2)x + \sum_{n \geq 2} c_{n+1}(\mu, \beta)(n + 1)T_n(x, y, z),$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + (1 - c_2)y + y \sum_{n \geq 2} c_{n+1}(\mu, \beta)R_{n-1}(x, y, z),$$

$$\ddot{z} = -c_2z + z \sum_{n \geq 2} c_{n+1}(\mu, \beta)R_{n-1}(x, y, z),$$

Donde  $T_n$  y  $R_n$  son polinomios homogéneos de grado  $n$ , que se calculan de forma recurrente,

$$T_n = \frac{2n - 1}{n}xT_{n-1} - \frac{n - 1}{n}(x^2 + y^2 + z^2)T_{n-2},$$

con  $T_0 = 1, \quad T_1 = x.$

$$R_n = \frac{2n + 3}{n + 2}xR_{n-1} - \frac{2n + 2}{n + 2}T_n - \frac{n + 1}{n + 2}(x^2 + y^2 + z^2)R_{n-2},$$

con  $R_0 = -1, \quad R_1 = -3x.$

Primero debemos hacer un cambio lineal para diagonalizar la parte lineal,

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = C(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_1 & & & & & \\ & -i\omega_1 & & & & \\ & & i\omega_2 & & & \\ & & & -i\omega_2 & & \\ \hline & & & & \lambda & \\ & & & & & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_6) \\ f_2(x_1, \dots, x_6) \\ f_3(x_1, \dots, x_6) \\ f_4(x_1, \dots, x_6) \\ g_1(x_1, \dots, x_6) \\ g_2(x_1, \dots, x_6) \end{pmatrix}.$$

Consideramos  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  y  $\bar{y} = (y_1, y_2) = (x_5, x_6)$ . Queremos encontrar,

$$y_1 = \sum_{|k| \geq 2} v_{1,k} \bar{x}^k, \quad y_2 = \sum_{|k| \geq 2} v_{2,k} \bar{x}^k,$$

que satisfagan la ecuación de invariancia.

- Las funciones  $f(\bar{x}, \bar{y})$  y  $g(\bar{x}, \bar{y})$  provienen de aplicar un cambio lineal a  $\sum_{n \geq 2} c_{n+1}(n+1)T_n$  y  $\sum_{n \geq 2} c_{n+1}R_{n-1}$ .
- Por lo tanto,  $f(\bar{x}, \bar{y})$  y  $g(\bar{x}, \bar{y})$  se pueden calcular de manera recurrente.
- Finalmente,  $f(\bar{x}, v(\bar{x}))$  y  $g(\bar{x}, v(\bar{x}))$  también se pueden calcular de manera recurrente componiendo estas recurrencias con  $v(\bar{x})$ .

Por ejemplo,

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x(\bar{x}, v(\bar{x})),$$

$$T_n = \frac{2n-1}{n} x(\bar{x}, v(\bar{x})) T_{n-1} -$$

$$\frac{n-1}{n} (x(\bar{x}, v(\bar{x}))^2 + y(\bar{x}, v(\bar{x}))^2 + z(\bar{x}, v(\bar{x}))^2) T_{n-2}.$$

# Manipulación Simbólica

Tenemos que trabajar con polinomios de cuatro variables.

$$P(x) = \sum_{|k| \geq 2} p_k x^k, \quad k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^4.$$

Guardaremos los polinomios como un vector de vectores  $p[i][j]$ .  
(  $i$  grado del monomio,  $j$  posición del monomio sobre el vector )

Hemos definido dos funciones:

- `void lloc_exp(int lloc, int k[], int gr)`; que dada una posición sobre el vector y el grado del monomio (`gr`), nos devuelve el multiíndice `k`.
- `int exp_lloc(int k[], int gr)`; que dado un multiíndice `k` y el grado del monomio `gr`, nos devuelve la posición que éste ocupa sobre el vector.

# Manipulación Simbólica

A partir de aquí es sencillo construir funciones que nos permitan operar con polinomios.

Ejemplo: Producto de dos monomios de grados  $g_1$  y  $g_2$ .

```
nt1 = ntp4(g1); nt2 = ntp4(g2);
for (i = 0; i < nt1; i++)
{
    lloc_exp4(i, k1, g1);
    for (j = 0; j < nt2; j++)
    {
        lloc_exp4(j, k2, g2);
        for (l = 0; l < 4; l++) k3[l] = k1[l] + k2[l];
        lloc = exp_lloc4(k3, g3);
        p3[g1+g2][lloc] += p1[g1][i]*p2[g2][j];
    }
}
```

## Test de Validez

- Dada una condición inicial  $v_0$ , denotamos por  $v_1$  y  $\tilde{v}_1$  la integración a tiempo  $t = 0.1$  de  $v_0$  sobre la aproximación de la variedad central y en el sistema completo, respectivamente.
- El comportamiento del error es:  $|\tilde{v}_1 - v_1| = ch^{n+1}$ , donde  $h$  es la distancia al origen de  $v_0$ .
- Si consideramos la variedad central hasta orden 8:

$h$	$ \tilde{v}_1 - v_1 $	$n + 1$
0.04	$2.3643547906724647e - 15$	
0.08	$1.2618898774811476e - 12$	9.059923
0.16	$6.9534006796827247e - 10$	9.105988
0.32	$3.9879163406855978e - 07$	9.163700

## Resultados para $\beta = 0.051689, \alpha = \delta = 0$

Hemos calculado la variedad central alrededor de Sub- $L_1$  hasta grado 32.

- Después de esta reducción estamos en un espacio de fase de dimensión 4,  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .
- Fijamos un nivel de energía ( $h$ ) y tomamos la sección de Poincaré  $x_3 = 0$ . Así reducimos el sistema a 2 dimensiones, más fácil de visualizar.
- Hemos tomado distintas condiciones iniciales y calculado sus sucesivas imágenes sobre la sección de Poincaré para distintos valores de la energía ( $h$ ).

*Resultados para  $\beta = 0.051689, \alpha = \delta = 0$*

