Operadores y Semigrupos de Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos

José Alberto Conejero
Depto. Matemática Aplicada & IMPA-UPV
Universidad Politécnica de Valencia, Spain

18-21 Octubre de 2006

Dirigida por
José Bonet y **Alfredo Peris**
Univ. Politécnica de Valencia, Spain

Operadores y Semigrupos de Operadores. . .

La tesis está dividida en 2 partes:

1. Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos.
2. **Semigrupos de Operadores Hipercíclicos y Caóticos.**

Repaso histórico

1. Birkhoff'29, MacLane'52, Rolewicz'69.
2. Kitai'82, Gethner & Shapiro'87, Godefroy & Shapiro'91, Herrero'92 y Salas'91.
3. Desch, Schappacher & Webb'97.

Notación

X espacio de Banach separable y de dimensión infinita.

(X también puede ser un espacio localmente convexo, métrico y completo)

$L(X)$ espacio de operadores lineales y continuos de X en X dotado de la topología inducida por la norma de X.

Semigrupos de operadores

Definition

Una familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ de operadores en $L(X)$ es un **semigrupo fuertemente continuo**, o un C_0-semigrupo, **de operadores** de $L(X)$ si satisface:

1. $T_0 = I$, donde I representa al operador identidad en X,
2. $T_t T_s = T_{t+s}$ para todo $t, s \geq 0$, (ley de semigrupo),
3. $\lim\limits_{t\to t_0} T_t x = T_{t_0} x$ para todo $t_0 \geq 0$, $x \in X$.

Ejemplo

Si X Banach y $A \in L(X)$, entonces $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores fuertemente continuo, donde $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

Si X es un espacio de funciones, estos operadores nos dan la solución de

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \text{ con } x(t) \in X.$$

Para cada condición inicial $x(0) \in X$, ésta viene dada por $\{e^{tA}x(0)\}_{t\geq 0}$.

Semigrupos Transitividad e Hiperciclicidad

Definition

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$ es **transitivo** si para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos existe $t > 0$ tal que

$$T_t(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definition

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$ es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que

$$\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0}, x) := \{T_t x \ : \ t \geq 0\} \text{ es densa en } X.$$

Dicho elemento x es un **vector hipercíclico** de $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Hiperciclicidad $\Leftrightarrow$ Transitividad (Teorema de Categoría de Baire).

Ejemplos de Semigrupos Hipercíclicos

Ejemplos

1. *Rolewicz'69*. En el espacio

$$L^p_\rho(\mathbb{R}^+) := \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p a^{-t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \text{ si } a > 1.$$

el semigrupo de traslación definido como

$$T_t x(s) = x(s+t), \text{ con } x \in L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$$

2. *Protopopescu & Azmy'92*. En el espacio ℓ^1, el semigrupo definido como

$$\{e^{tA}\}_{t\geq 0} \text{ con } A = aI + bB \text{ para } b > a \geq 0$$

siendo $B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Ejemplos de Semigrupos Hipercíclicos

Ejemplos

1. *Desch, Schappacher & Webb'97*. Consideremos en $L^2([0,\infty),\mathbb{C})$ la ecuación

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{x,x}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t), \\ u(0,t) &= 0 \text{ para } t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x) \text{ para } x \geq 0. \end{aligned}$$

Si $a, b, c > 0$ y $c < b^2/(2a) < 1$, entonces el semigrupo solución es hipercíclico.

Semigrupos Mezclantes

Definition

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es **mezclante** si para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos existe $r > 0$ tal que

$$T_t(U) \cap V \neq \emptyset \text{ para todo } t \in \Delta \text{ con } t \geq r.$$

Definition

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es **débilmente mezclante** si el semigrupo $\{T_t \oplus T_t\}_{t\geq 0}$ es transitivo en la suma directa $X \oplus X$.

Es decir, para todo $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos existe $t > 0$ tal que

$$T_t(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ y } T_t(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Las definiciones anteriores también se pueden dar para sucesiones de operadores.

$\{T_n\}_n$ es **transitiva** si para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

$\{T_n\}_n$ es **hipercíclica** si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(\{T_n\}_n, x) := \{T_n x \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, es densa en X.

$\{T_n\}_n$ es **mezclante** si para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos existe $r > 0$ tal que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq r$.

$\{T_n\}_n$ es **débilmente mezclante** si la sucesión $\{T_n \oplus T_n\}_n$ es transitiva en la suma directa $X \oplus X$.

También se pueden dar para un operador si consideramos la sucesión de sus potencias $\{T^n\}_n$.

Mezclante $\Rightarrow$ Débilmente mezclante $\Rightarrow$ Hiperciclicidad.

Las implicaciones contrarias no son ciertas: Salas'91, Herrero'92, de la Rosa & Read'06.

Semigrupos Caóticos

Definition

Un elemento $x \in X$ se dice que es un **punto periódico** para el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ si existe $t > 0$ tal que $T_t x = x$.

Definition

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es **caótico** en el sentido de **Devaney** si:

1. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es transitivo.
2. El conjunto de puntos periódicos de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es denso en X.

Discretizaciones de $\{T_t\}_{t\geq 0}$:
General Fijando $\{t_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, consideramos $\{T_{t_n}\}_n$.

Autónoma Fijando $t > 0$, consideramos la sucesión iterada $\{T_t^n\}_n = \{T_{nt}\}_n$.

Criterio de hiperciclicidad

Kitai'82, Gethner & Shapiro'87, Bès & Peris'99.

Criterio de hiperciclicidad para semigrupos

Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Si existe una sucesión $\{t_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, $Y, Z \subset X$ densos y $S_t : Z \to X$ tales que

$$\left.\begin{array}{r} \forall y \in Y,\ \lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n} y = 0, \\ \forall z \in Z,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{t_n} z = 0, \\ \forall z \in Z,\ \lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n} S_{t_n} z = z, \end{array}\right\} \Longrightarrow \{T_t\}_{t\geq 0} \text{ hipercíclico.}$$

Bès & Peris'99: Débilmente mezclante $\Leftrightarrow$ Verificar las hipótesis del Criterio de hiperciclicidad.

Teorema (C. & Peris'05)

Son equivalentes

1. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es débilmente mezclante.
2. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ admite una discretización mezclante.
3. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ admite una discretización débilmente mezclante.
4. Existe una discretización autónoma débilmente mezclante.
5. Todas las discretizaciones autónomas son débilmente mezclantes.

Teorema (Bermúdez, Bonilla, C. & Peris'05)

Son equivalentes

1. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es mezclante.
2. Toda discretización de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es mezclante.
3. Toda discretización de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es débilmente mezclante.
4. Toda discretización de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclica.
5. Existe una discretización autónoma mezclante.

Problema

Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ hipercíclico, ¿es T_t hipercíclico para todo $t>0$?

Teorema (Oxtoby & Ulam'41)

Existe un conjunto G_δ denso $A\subset\mathbb{R}^+$ tal que T_t es hipercíclico para todo $t\in A$.

De hecho, para cada vector hipercíclico x hay un G_δ denso $A\subset\mathbb{R}^+$ tal que x es hipercíclico para T_t con $t\in A$.

Teorema (C., Müller & Peris'06)

Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico, entonces para todo T_t es hipercíclico para todo $t>0$ y comparte los vectores hipercíclicos con el semigrupo.

Problema

Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es caótico, ¿es T_t caótico para algún $t>0$?

Semigrupo de Traslación

Definición

Una función medible $\rho : \Delta \to \mathbb{R}$ es un **función peso admisible** si satisface:

1. $\rho(t) > 0$ para todo $t \in \Delta$, y
2. existen $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$ tales que para todo $t, t' \in \Delta$
   $\rho(t) \leq Me^{w|t'|}\rho(t + t')$.

Consideramos los espacios

$$X = L^p_\rho(\Delta) := \left\{ f : \Delta \to \mathbb{K} \text{ medible } : \|f\|_{p,\rho} := \left(\int_\Delta |f(\tau)|^p \rho(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

con $1 \leq p < \infty$, y

$$X = C_{0,\rho}(\Delta) = \left\{ f : \Delta \to \mathbb{K} \text{ continua } : \lim_{t \to \infty} f(t)\rho(t) = 0 \right\}$$

dotado de la norma $\|f\|_{\infty,\rho} := \sup_{t \in \Delta} |f(t)|\rho(t)$.

Semigrupo de Traslación

Teorema (Desch, Schappacher & Webb'97)

Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de traslación en $L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$ o en $C_{0,\rho}(\mathbb{R}^+)$.

$$\{T_t\}_{t\geq 0} \text{ es hipercíclico } \Leftrightarrow \liminf_{t\to\infty} \rho(t) = 0.$$

Teorema (Bermúdez, Bonilla, C. & Peris'05)

Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de traslación en $L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$ o en $C_{0,\rho}(\mathbb{R}^+)$.

$$\{T_t\}_{t\geq 0} \text{ es mezclante } \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0.$$

Teorema (deLaubenfels & Emamirad'01)

Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de traslación en $L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$.

$$\begin{aligned} \{T_t\}_{t\geq 0} \text{ es caótico } \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \rho(t) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Existe un punto periódico no trivial.} \end{aligned}$$

Semigrupo de Traslación

Obtenemos caracterizaciones de la hiperciclicidad, las propiedades mezclante y débilmente mezclante, y el caos del semigrupo de traslación en estos espacios en términos de la función peso admisible ρ.

Definiendo funciones peso de manera adecuada se pueden encontrar los siguientes

Contraejemplos

1. Existe un semigrupo débilmente mezclante y sin embargo ningún T_t es hipercíclico.
2. Existe un semigrupo para el que todo T_t, $t > 0$ es mezclante, y sin embargo el semigrupo no lo es.
3. Existe un semigrupo caótico tal que ningún T_t es hipercíclico.