

Cálculo de la escisión de separatrices usando técnicas de matching complejo y resurgencia aplicadas a la ec. de Hamilton-Jacobi

Carme Olivé Farré

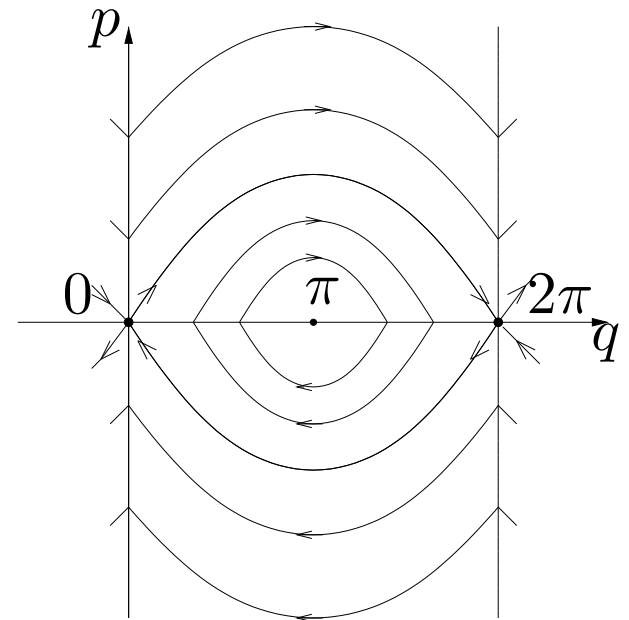
Universitat Rovira i Virgili

Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.
Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \sin q \end{cases}$$

con $q \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.



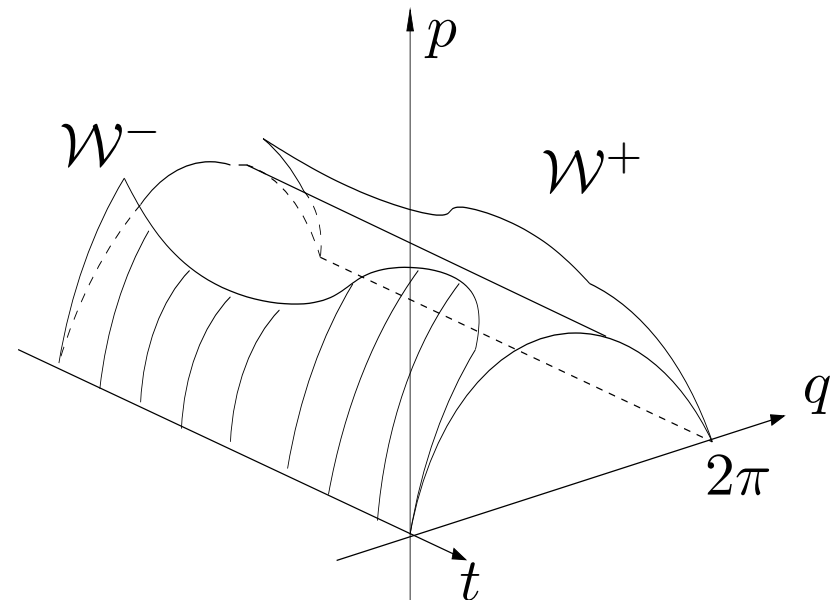
Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.
Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon) \end{cases}$$

con $0 < \varepsilon < 1$ y $\mu > 0$
dos parámetros

y $(q, t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\varepsilon\mathbb{Z}$.



Escisión de separatrices

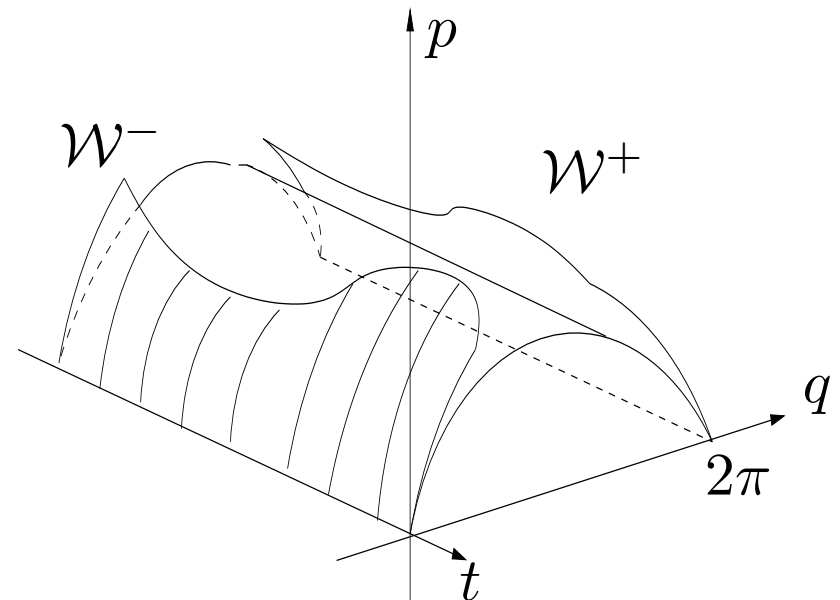
- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.
Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon) \end{cases}$$

con $0 < \varepsilon < 1$ y $\mu > 0$

dos parámetros

y $(q, t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\varepsilon\mathbb{Z}$.



Si $\tau := t/\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\mathbb{T}_{\sigma_0} := \{\tau \in \mathbb{C}/2\pi; |\Im m \tau| < \sigma_0\}$.

Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

- La Ecuación de Hamilton-Jacobi y la escisión de separatrices.

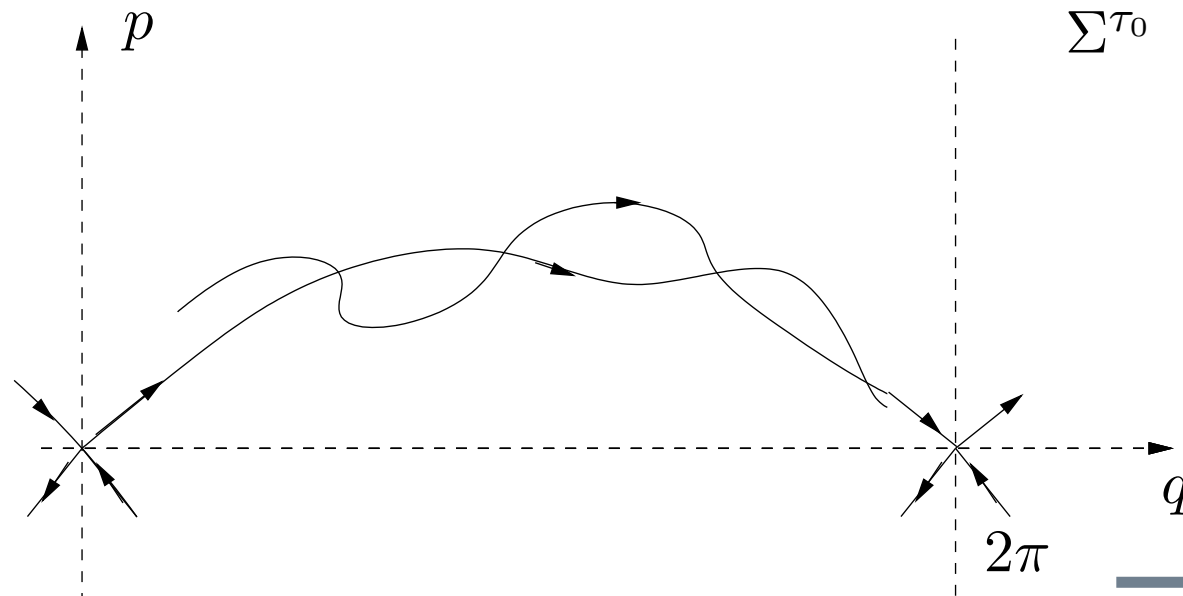
Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

- La Ecuación de Hamilton-Jacobi y la escisión de separatrices.



Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

- La Ecuación de Hamilton-Jacobi y la Escisión de separatrices.
- Función de Melnikov (teoría perturbativa clásica).

$$d = \mu \frac{\pi}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1} \pi / 2)} + O(\mu^2).$$

Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

- La Ecuación de Hamilton-Jacobi y la Escisión de separatrices.
- Función de Melnikov (teoría perturbativa clásica).

$$d = \mu \frac{\pi}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1} \pi / 2)} + O(\mu^2).$$

$$\mu = \varepsilon^p$$

$$p > 2$$

Escisión de separatrices

- Sistema hamiltoniano integrable con una perturbación de oscilación rápida: zonas caóticas muy pequeñas.

Ejemplo test:

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon p \\ \dot{p} = \varepsilon \sin q - \varepsilon \mu \sin q \sin \tau \end{cases}$$

- La Ecuación de Hamilton-Jacobi y la Escisión de separatrices.
- Función de Melnikov (teoría perturbativa clásica).
- Escisión a partir de las funciones T^\pm .

$$d = \max_{\tau_0} \left| \partial_q T^+(\pi, \tau_0) - \partial_q T^-(\pi, \tau_0) \right|.$$

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching.
Poincaré: cambio $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$.

$$T^\pm(u, \tau; \mu, \varepsilon) \longrightarrow T_0(u) + \sum_{n \geq 1} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$$

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching.

Poincaré: cambio $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$.

$$T^\pm(u, \tau; \mu, \varepsilon) \longrightarrow T_0(u) + \sum_{n \geq 1} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$$

T_n singularidades polares en $\{i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\}$.

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching.
Zona outer, $T_0(u)$. Zona inner, $\phi_0^\pm(z, \tau; \mu)$.
- Resumación de Borel-Laplace para el estudio de ϕ_0^\pm .

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching.
Zona outer, $T_0(u)$. Zona inner, $\phi_0^\pm(z, \tau; \mu)$.
- Resumación de Borel-Laplace para el estudio de ϕ_0^\pm .

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

- Teoría de la Resurgencia.

$$(\phi_0^+ - \phi_0^-)(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching. Zona outer, $T_0(u)$. Zona inner, $\phi_0^\pm(z, \tau; \mu)$.
- Resumación de Borel-Laplace para el estudio de ϕ_0^\pm .

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

- Teoría de la Resurgencia.

$$(\phi_0^+ - \phi_0^-)(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

- Enderezamiento del flujo de $\Delta T = T^+ - T^-$.

Escisión de separatrices

Metodología usada:

- Aproximaciones de T^\pm y técnicas de Matching. Zona outer, $T_0(u)$. Zona inner, $\phi_0^\pm(z, \tau; \mu)$.
- Resumación de Borel-Laplace para el estudio de ϕ_0^\pm .

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

- Teoría de la Resurgencia.

$$(\phi_0^+ - \phi_0^-)(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta.$$

- Enderezamiento del flujo de $\Delta T = T^+ - T^-$.

Resultado final: para $u \in \mathbb{R}$, $\Delta T \sim$ parte dominante de $\phi_0^+ - \phi_0^-$.

Cálculo de la escisión de separatrices usando Matching complejo y Resurgencia

2. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona outer.
3. Estudio de la Ecuación Inner con la Teoría de la Resurgencia.
4. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona inner.
5. Estudio de la diferencia entre variedades y medida de la escisión de separatrices.

2. Las variedades invariantes en la zona outer

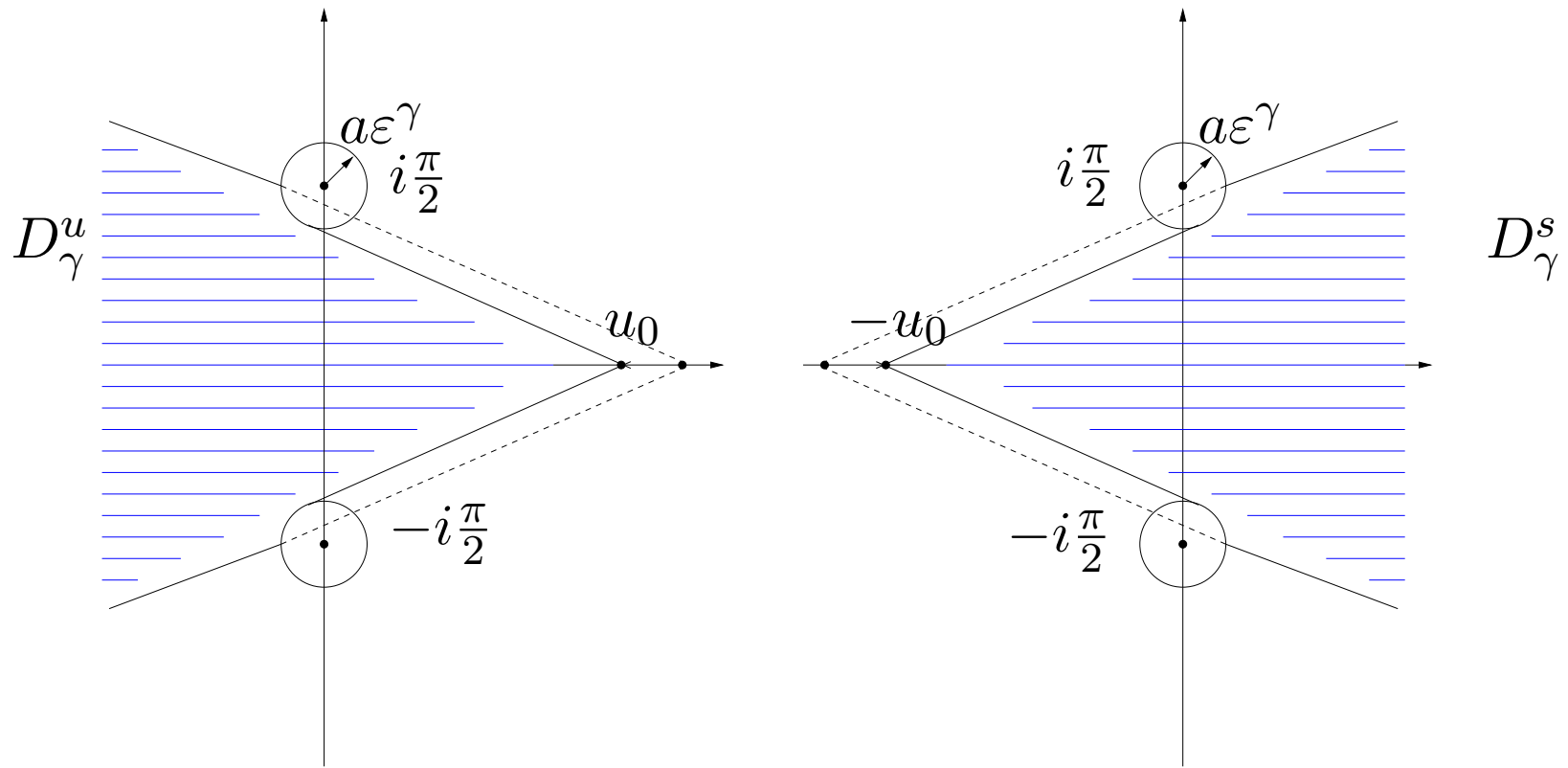
Cambio: $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$, $T(u, \tau; \mu, \varepsilon) = T(q_0(u), \tau; \mu, \varepsilon)$.

Para la variedad inestable:

$$q \in (0, \pi + Q_0) \quad \Leftrightarrow \quad u \in (-\infty, u_0).$$

2. Las variedades invariantes en la zona outer

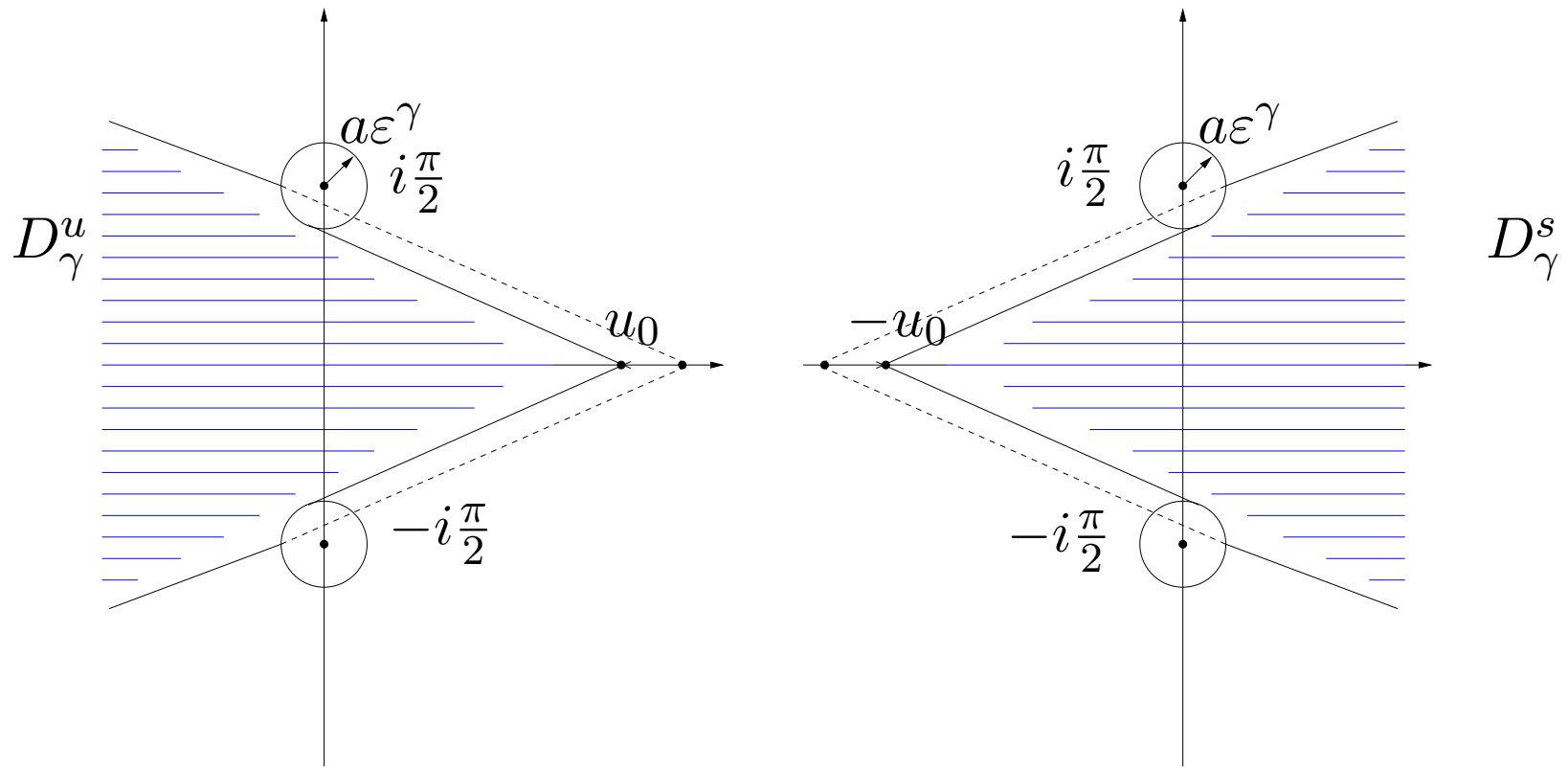
Cambio: $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$, $T(u, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathcal{T}(q_0(u), \tau; \mu, \varepsilon)$.



$$0 \leq \gamma < 1$$

2. Las variedades invariantes en la zona outer

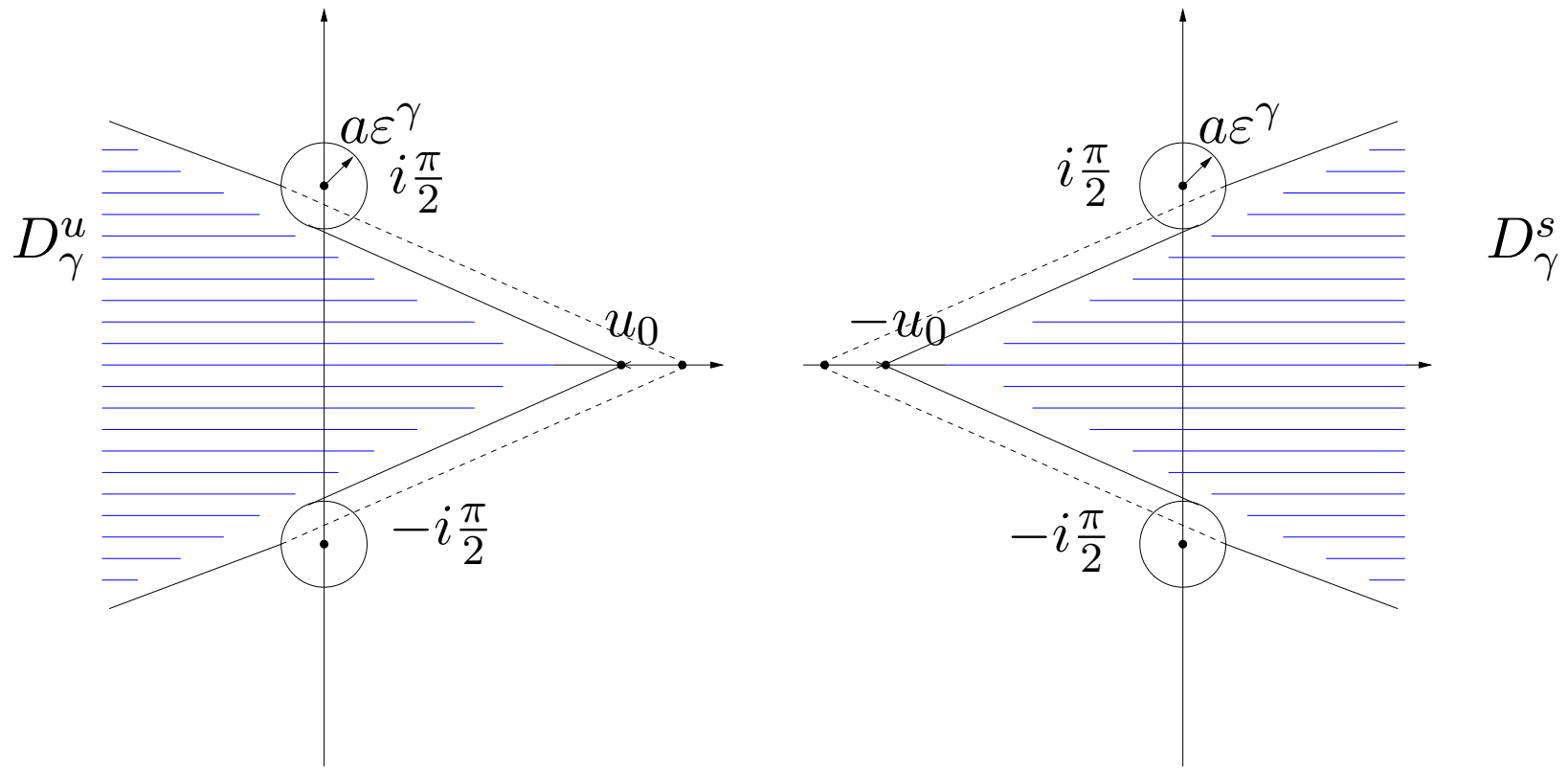
Cambio: $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$, $T(u, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathcal{T}(q_0(u), \tau; \mu, \varepsilon)$.



$$\lim_{q \rightarrow 0, 2\pi} \partial_q \mathcal{T}^\pm(q, \tau; \mu, \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{\Re u \rightarrow \pm\infty} (\cosh u \partial_u \mathcal{T}^\pm(u, \tau; \mu, \varepsilon)) = 0.$$

2. Las variedades invariantes en la zona outer

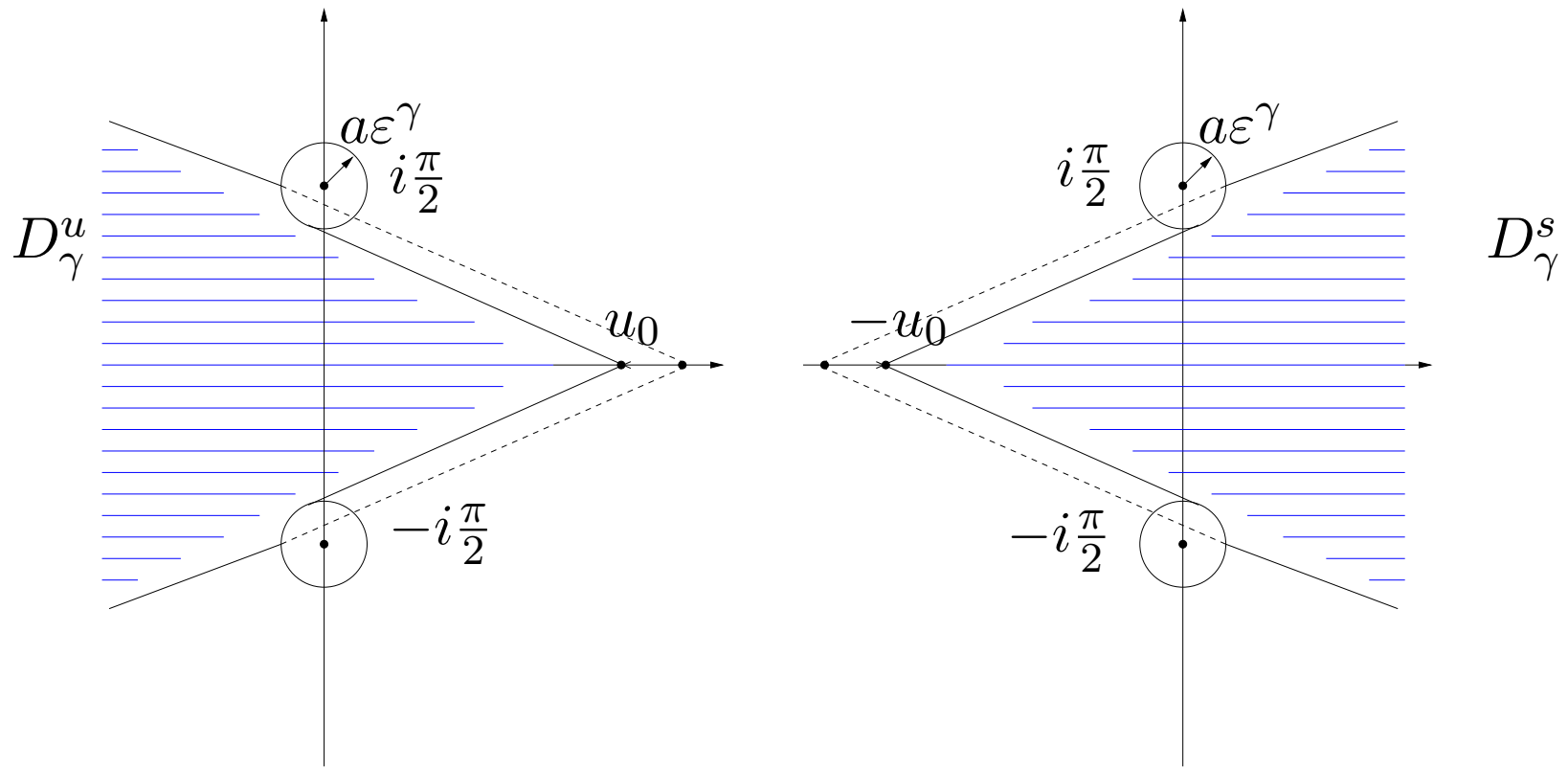
Cambio: $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$, $T(u, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathcal{T}(q_0(u), \tau; \mu, \varepsilon)$.



$$\|h\|_{2, \sigma_0} := \sum_k \|h^{[k]}\|_2 e^{|k| \sigma_0}$$

2. Las variedades invariantes en la zona outer

Cambio: $q = q_0(u) = 4 \arctan e^u$, $T(u, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathbb{T}(q_0(u), \tau; \mu, \varepsilon)$.



$$\|h\|_{2, \sigma_0} := \sum_k \underbrace{\|h^{[k]}\|_2}_{\sup_{u \in D_\gamma^u} |\cosh^2 u \cdot h^{[k]}(u)|} e^{|k| \sigma_0}$$

Cálculo de la escisión de separatrices usando Matching complejo y Resurgencia

2. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona outer.
3. Estudio de la Ecuación Inner con la Teoría de la Resurgencia.
4. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona inner.
5. Estudio de la diferencia entre variedades y medida de la escisión de separatrices.

3. La Ecuación Inner

Partimos de $\sum_{n \geq 0} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$ con $T_n = O(u - i\pi/2)^{-(n+1)}$.

3. La Ecuación Inner

Partimos de $\sum_{n \geq 0} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$ con $T_n = O(u - i\pi/2)^{-(n+1)}$.

Cambio $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)$ y reescalado de función $\phi = \varepsilon T$:

$$\phi_0(z, \tau; \mu) + \sum_{n \geq 1} \phi_n(z, \tau; \mu) \varepsilon^n.$$

Ecuación Inner:

$$\partial_\tau \phi_0 - \frac{z^2}{8} (\partial_z \phi_0)^2 + \frac{2}{z^2} (1 - \mu \sin \tau) = 0$$

Buscamos ϕ_0^\pm , soluciones con condiciones asintóticas:

$$\lim_{\Re z \rightarrow \pm\infty} \phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = 0$$

y 2π -periódicas en τ .

3. La Ecuación Inner

Partimos de $\sum_{n \geq 0} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$ con $T_n = O(u - i\pi/2)^{-(n+1)}$.

Cambio $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)$ y reescalado de función $\phi = \varepsilon T$:

$$\phi_0(z, \tau; \mu) + \sum_{n \geq 1} \phi_n(z, \tau; \mu) \varepsilon^n.$$

Ecuación Inner:

$$\partial_\tau \phi_0 - \frac{z^2}{8} (\partial_z \phi_0)^2 + \frac{2}{z^2} (1 - \mu \sin \tau) = 0$$

Solución formal:

$$\tilde{\phi}_0(z, \tau; \mu) = \frac{4}{z} - \mu \frac{2 \cos \tau}{z^2} - \mu \frac{4 \sin \tau + \frac{1}{3} \mu}{z^3} + \mu \frac{12 \cos \tau + \frac{1}{2} \mu \sin(2\tau)}{z^4} + \mu O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

3. La Ecuación Inner

Partimos de $\sum_{n \geq 0} T_n(u, \tau; \mu) \varepsilon^n$ con $T_n = O(u - i\pi/2)^{-(n+1)}$.

Cambio $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)$ y reescalado de función $\phi = \varepsilon T$:

$$\phi_0(z, \tau; \mu) + \sum_{n \geq 1} \phi_n(z, \tau; \mu) \varepsilon^n.$$

Ecuación Inner:

$$\partial_\tau \phi_0 - \frac{z^2}{8} (\partial_z \phi_0)^2 + \frac{2}{z^2} (1 - \mu \sin \tau) = 0$$

Solución formal:

$$\tilde{\phi}_0(z, \tau; \mu) = \underbrace{\frac{4}{z}}_{T_0} - \mu \underbrace{\frac{2 \cos \tau}{z^2}}_{T_1} - \mu \underbrace{\frac{4 \sin \tau + \frac{1}{3} \mu}{z^3}}_{T_2} + \mu \underbrace{\frac{12 \cos \tau + \frac{1}{2} \mu \sin(2\tau)}{z^4}}_{T_3} + \mu O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

3. La Ecuación Inner

Sumas de Borel-Laplace:

Series Gevrey-1, $\tilde{\phi}_0$

$\tilde{\mathcal{B}}$

$\hat{\phi}_0$,

Gérmens analíticos en el origen con prolongación analítica en un sector y con crecimiento exponencial

\mathcal{L}^\pm

Gérmens Sectoriales, ϕ_0^\pm

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

3. La Ecuación Inner

Sumas de Borel-Laplace:

Series Gevrey-1, $\tilde{\phi}_0$

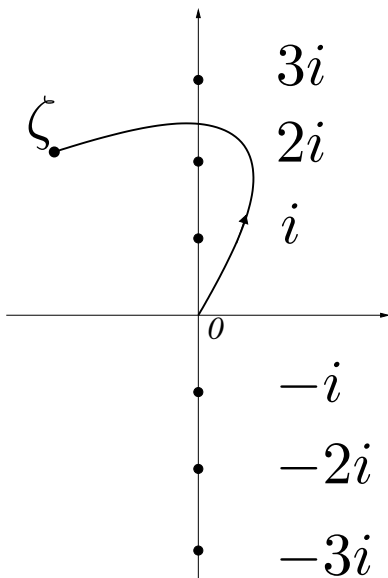
$\tilde{\mathcal{B}}$

$\hat{\phi}_0$,

Gérmenes analíticos en el origen con prolongación analítica en un sector y con crecimiento exponencial

\mathcal{L}^\pm

Gérmenes Sectoriales, ϕ_0^\pm



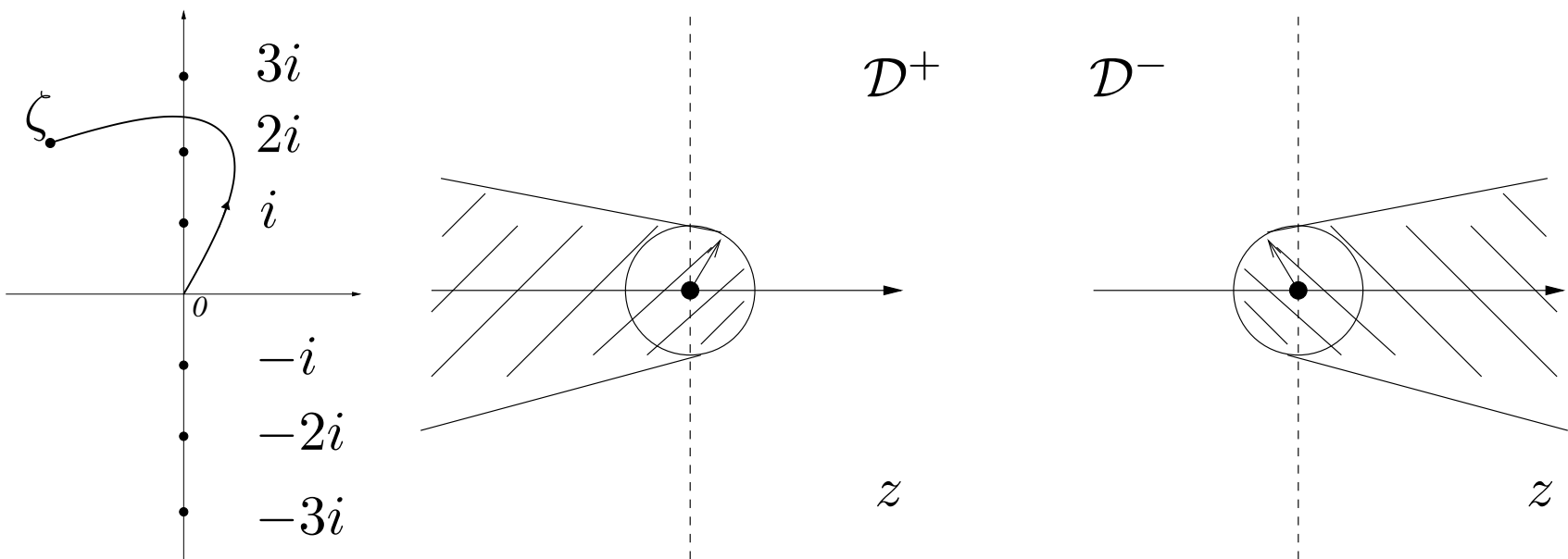
$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

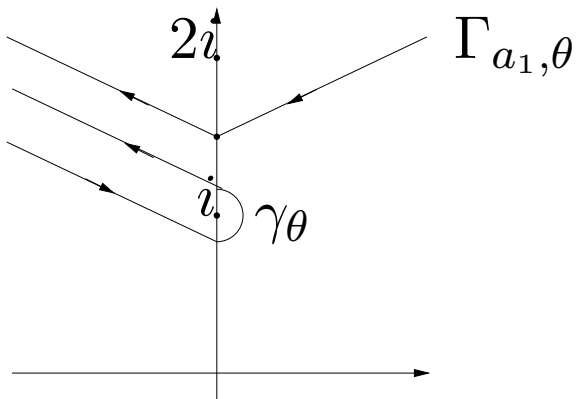
3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$



3. La Ecuación Inner

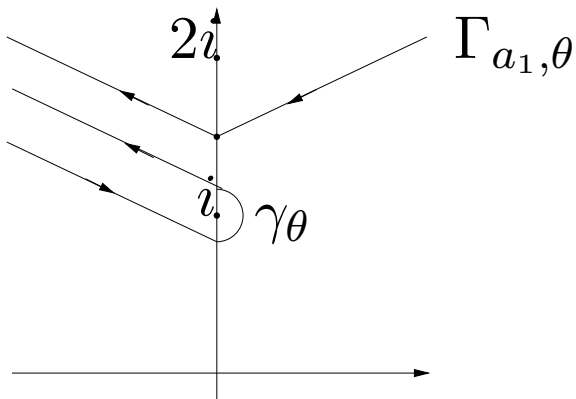
$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$



$$= \int_{\gamma_\theta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta} d\zeta + \int_{\Gamma_{a_1, \theta}} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta} d\zeta$$

3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

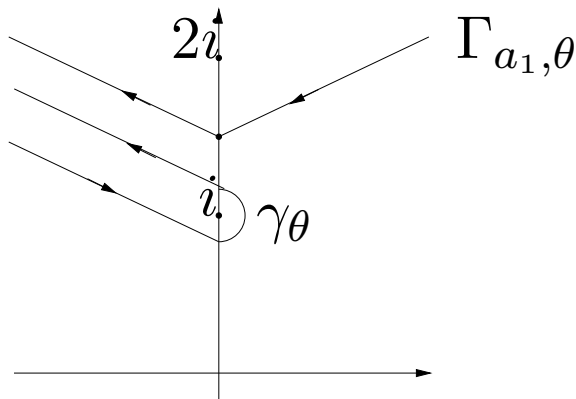


$$= \int_{\gamma\theta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta} d\zeta +$$

$$+ \underbrace{\int_{\Gamma_{a_1, \theta}} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta} d\zeta}_{|\mu| D e^{a_1 \Im m z}}$$

3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$



$$= \int_{\gamma_\theta} \boxed{\hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta}} d\zeta + \int_{\Gamma_{a_1, \theta}} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) e^{-z\zeta} d\zeta$$

$e^{-iz} \Delta_i^\nabla \phi_0$

Se demuestra que un mayor de $\Delta_i^\nabla \phi_0$ es:

$$f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} \left(\frac{1}{2\pi i \zeta} + \hat{\psi}(\zeta, \tau) \frac{\log \zeta}{2\pi i} \right)$$

3. La Ecuación Inner

$$\begin{aligned}\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta \\ &= e^{-iz} f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} \left(1 + \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\zeta, \tau) e^{-z\zeta} d\zeta \right) + O(|\mu| e^{a_1 \Im m z})\end{aligned}$$

3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

$$= e^{-iz} f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} \left(1 + \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\zeta, \tau) e^{-z\zeta} d\zeta \right) + O(|\mu| e^{a_1 \Im m z})$$

$$= e^{-iz} f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} (1 + O(|z|^{-1})) + O(|\mu| e^{a_1 \Im m z})$$

con $\Im m z \rightarrow -\infty$.

3. La Ecuación Inner

$$\phi_0^+(z, \tau; \mu) - \phi_0^-(z, \tau; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu) d\zeta$$

$$= e^{-iz} f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} \left(1 + \int_0^{+\infty} \hat{\psi}(\zeta, \tau) e^{-z\zeta} d\zeta \right) + O(|\mu| e^{a_1 \Im m z})$$

$$= e^{-iz} f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} (1 + O(|z|^{-1})) + O(|\mu| e^{a_1 \Im m z})$$

con $\Im m z \rightarrow -\infty$.

Resultado importante:

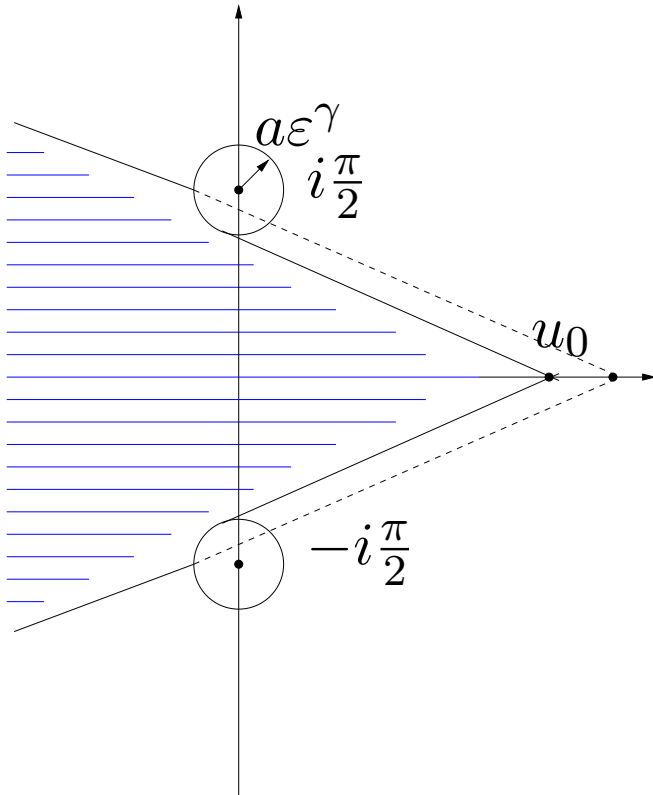
$\tilde{\phi}_0$ es una función RESURGENTE SIMPLE.

Cálculo de la escisión de separatrices usando Matching complejo y Resurgencia

2. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona outer.
3. Estudio de la Ecuación Inner con la Teoría de la Resurgencia.
- 4. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona inner.**
5. Estudio de la diferencia entre variedades y medida de la escisión de separatrices.

4. Variedades invariantes en la zona inner

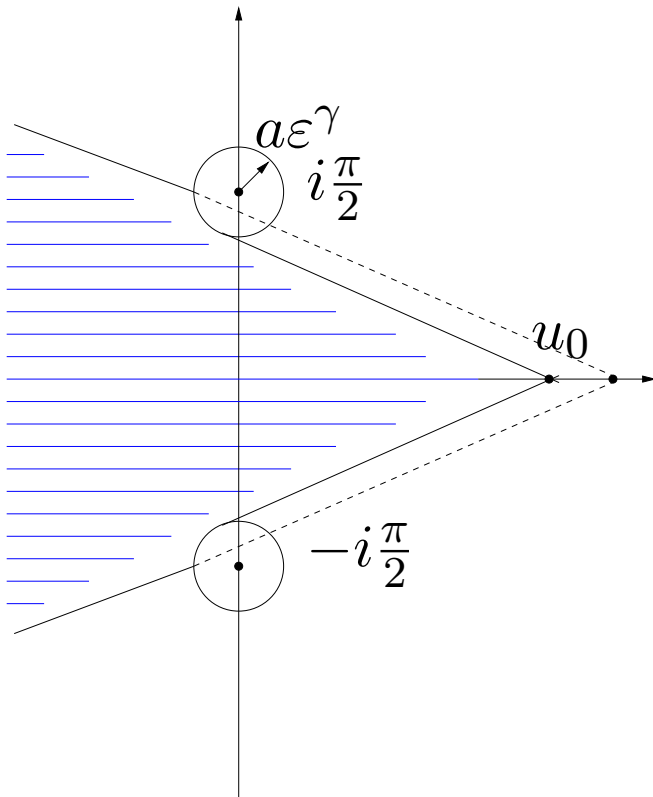
Dominio outer, D_γ^u



$T^-(u, \tau)$ conocida

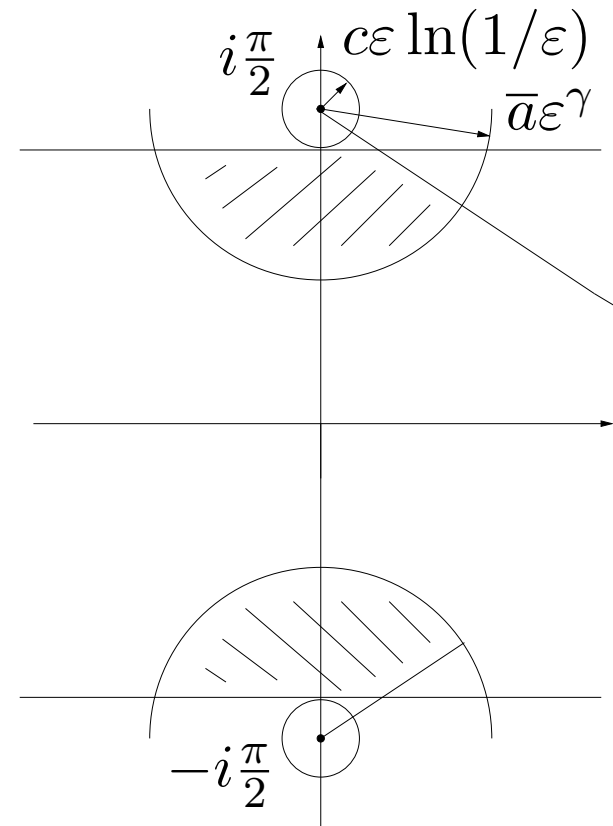
4. Variedades invariantes en la zona inner

Dominio outer, D_γ^u



$T^-(u, \tau)$ conocida

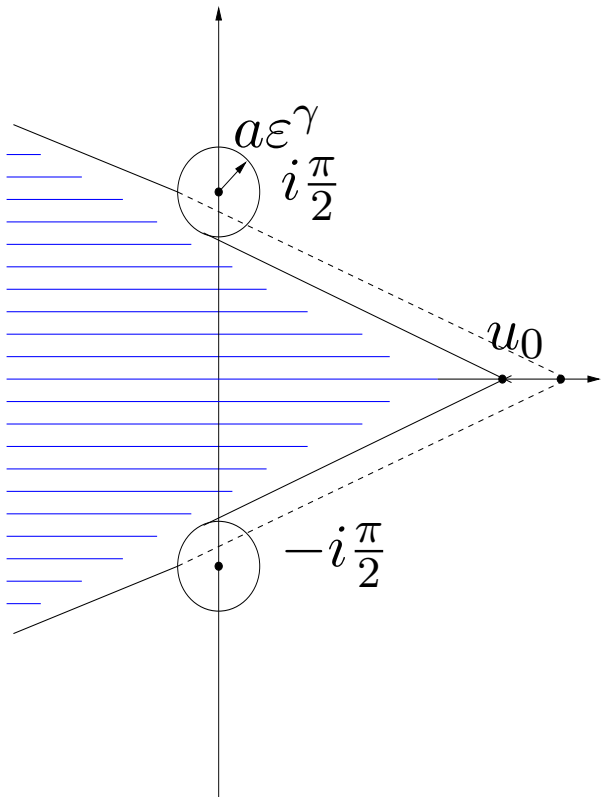
Dominio inner, D_ϵ^u



$T^-(u, \tau) = ?$

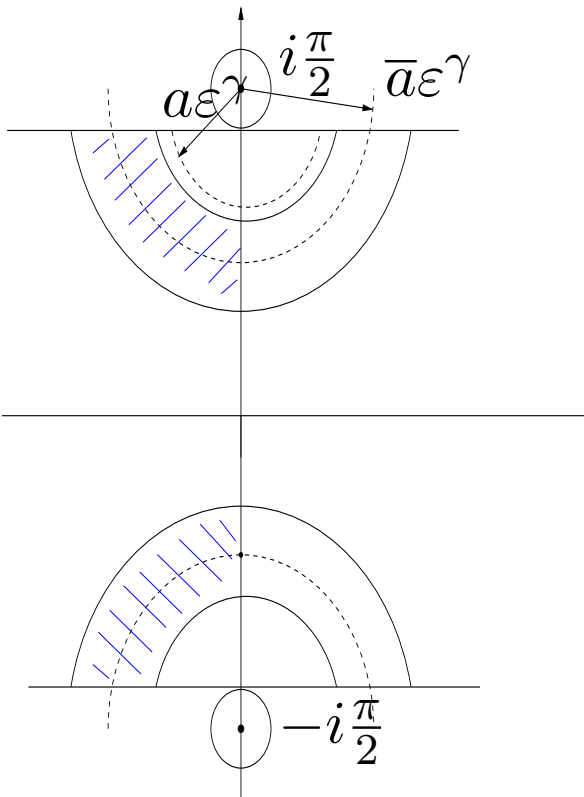
4. Variedades invariantes en la zona inner

Dominio outer, D_γ^u

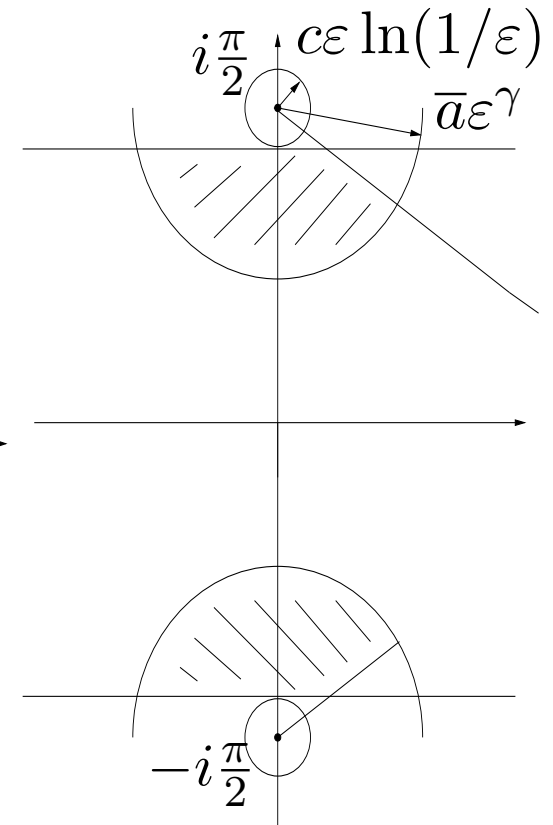


$T^-(u, \tau)$ conocida

Dominio matching



Dominio inner, D_ϵ^u



$T^-(u, \tau) = ?$

Cálculo de la escisión de separatrices usando Matching complejo y Resurgencia

2. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona outer.
3. Estudio de la Ecuación Inner con la Teoría de la Resurgencia.
4. Existencia y aproximación de las variedades invariantes en la zona inner.
5. Estudio de la diferencia entre variedades y medida de la escisión de separatrices.

5. Diferencia entre variedades invariantes

Proposición

Si $T^\pm(u, \tau)$ son soluciones analíticas de la Ecuación de Hamilton-Jacobi en los dominios respectivos $D^{u,s} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, entonces el operador

$$\mathcal{L}_\varepsilon := \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u$$

tiene coeficientes analíticos en las variables $(u, \tau) \in (D^u \cap D^s) \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ y la función

$$\Delta T := T^+ - T^-$$

es solución de

$$\mathcal{L}_\varepsilon \Delta T = 0.$$

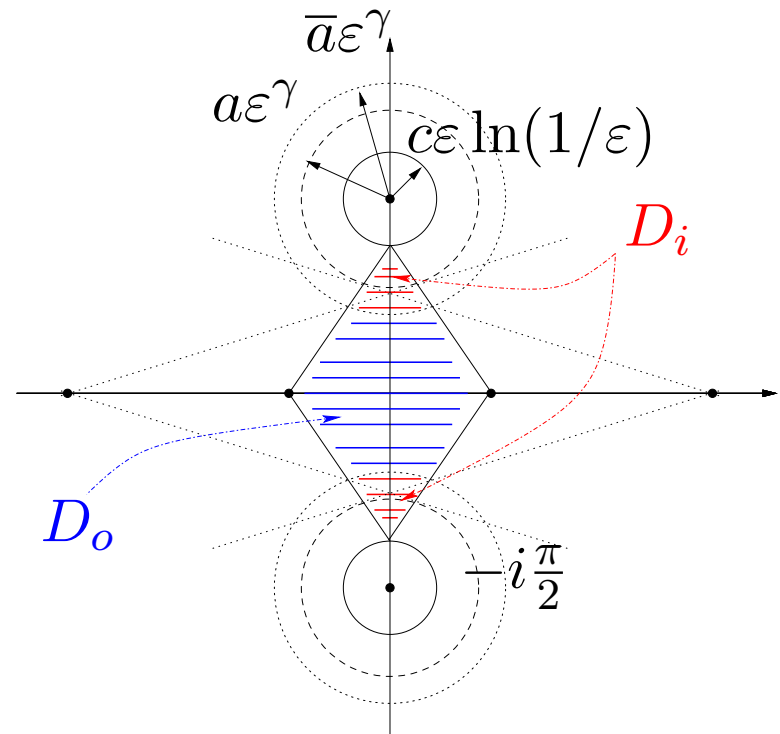
5.1. Enderezamiento del flujo

Buscamos un cambio $(u, \tau) = (v + \mathcal{U}(v, \tau; \mu, \varepsilon), \tau)$ que conjugue

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u$$

con

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v$$



$$D = D_o \cup D_i$$

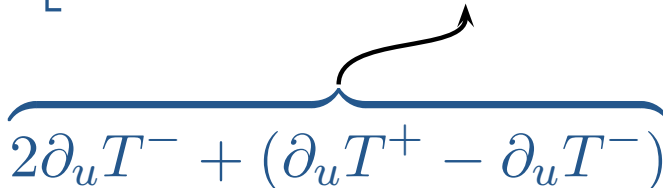
5.1. Enderezamiento del flujo

Esquema del proceso:

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u \longrightarrow \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v$$

5.1. Enderezamiento del flujo

Esquema del proceso:

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u \longrightarrow \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v$$

$$2\partial_u T^- + (\partial_u T^+ - \partial_u T^-)$$

5.1. Enderezamiento del flujo

Esquema del proceso:

$$\begin{array}{c}
 \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u \longrightarrow \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{2\partial_u T^- + (\partial_u T^+ - \partial_u T^-)} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{T'_0 + (\partial_u T^- - T'_0)}
 \end{array}$$

5.1. Enderezamiento del flujo

Esquema del proceso:

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^+ + \partial_u T^-) \right] \partial_u \longrightarrow \varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v$$

$$2\partial_u T^- + (\partial_u T^+ - \partial_u T^-)$$

$$T'_0 + (\partial_u T^- - T'_0)$$

$$1 + \frac{\cosh^2 u}{8} (\partial_u T^- - T'_0)$$

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Puesto que pretendemos obtener una fórmula asintótica para $\Delta T = T^+ - T^-$, acotaremos la diferencia

$$\Delta T(u, \tau) - F(u, \tau)$$

con $F(u, \tau) := \varepsilon^{-1} f_0(\mu) \left[e^{i\tau} e^{-i\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)} - e^{-i\tau} e^{i\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2)} \right]$.

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Puesto que pretendemos obtener una fórmula asintótica para $\Delta T = T^+ - T^-$, acotaremos la diferencia

$$\Delta T(u, \tau) - F(u, \tau)$$

con $F(u, \tau) := \varepsilon^{-1} f_0(\mu) \left[e^{i\tau} e^{-i\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)} - e^{-i\tau} e^{i\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2)} \right]$.

$$\begin{aligned} (\Delta T - F)(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) &= \Delta T(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) - F(v, \tau) + \\ &\quad + F(v, \tau) - F(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) \end{aligned}$$

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Puesto que pretendemos obtener una fórmula asintótica para $\Delta T = T^+ - T^-$, acotaremos la diferencia

$$\Delta T(u, \tau) - F(u, \tau)$$

con $F(u, \tau) := \varepsilon^{-1} f_0(\mu) \left[e^{i\tau} e^{-i\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)} - e^{-i\tau} e^{i\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2)} \right]$.

$$\begin{aligned} (\Delta T - F)(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) &= \Delta T(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) - F(v, \tau) + \\ &\quad + F(v, \tau) - F(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) \end{aligned}$$

- $F(v, \tau) - F(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau)$
Teorema del Valor Medio

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Puesto que pretendemos obtener una fórmula asintótica para $\Delta T = T^+ - T^-$, acotaremos la diferencia

$$\Delta T(u, \tau) - F(u, \tau)$$

con $F(u, \tau) := \varepsilon^{-1} f_0(\mu) \left[e^{i\tau} e^{-i\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)} - e^{-i\tau} e^{i\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2)} \right]$.

$$\begin{aligned} (\Delta T - F)(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) &= \Delta T(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) - F(v, \tau) + \\ &\quad + F(v, \tau) - F(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) \end{aligned}$$

- $F(v, \tau) - F(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau)$
Teorema del Valor Medio
- $\Delta T(v + \mathcal{U}(v, \tau), \tau) - F(v, \tau)$
solución de $(\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v) \psi = 0$

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Lema

Sea $\psi(v, \tau)$ analítica en $] -ir_0, ir_0[\times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ y solución de la ecuación en derivadas parciales

$$(\varepsilon^{-1} \partial_{\tau} + \partial_v) \psi = 0.$$

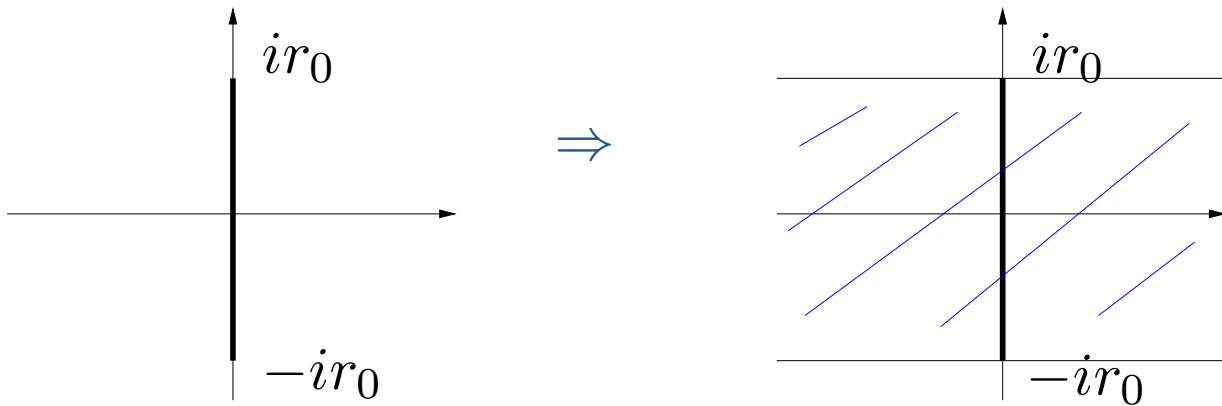
5.2. Medida de la escisión de separatrices

Lema

Sea $\psi(v, \tau)$ analítica en $] -ir_0, ir_0[\times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ y solución de la ecuación en derivadas parciales

$$(\varepsilon^{-1} \partial_\tau + \partial_v) \psi = 0.$$

Entonces,



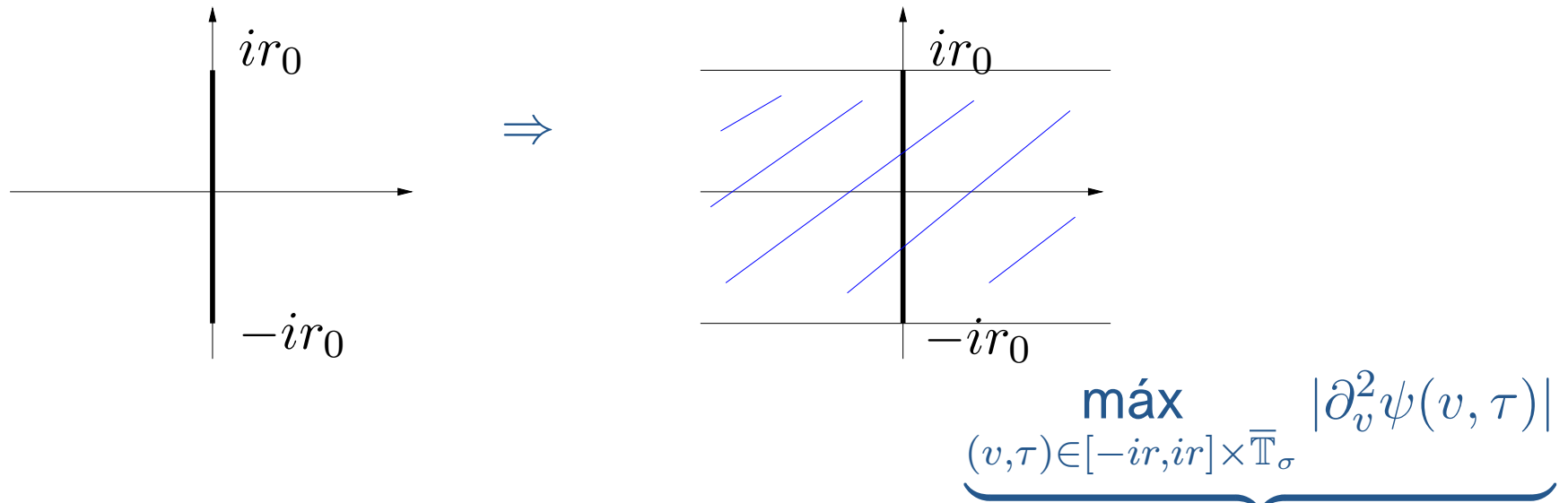
5.2. Medida de la escisión de separatrices

Lema

Sea $\psi(v, \tau)$ analítica en $] -ir_0, ir_0[\times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ y solución de la ecuación en derivadas parciales

$$(\varepsilon^{-1} \partial_{\tau} + \partial_v) \psi = 0.$$

Entonces,



Además, para $0 < r < r_0$, si ε es pequeño,

$$\forall (v, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |\partial_v \psi(v, \tau)| \leq \varepsilon 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}.$$

5.2. Medida de la escisión de separatrices

Teorema

Fijados $\mu_0 > 0$ y $\tilde{c} > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cualesquiera $0 < \mu \leq \mu_0$ y $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existen constantes \tilde{u}_2 y C_0 tales que $\forall (u, \tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$

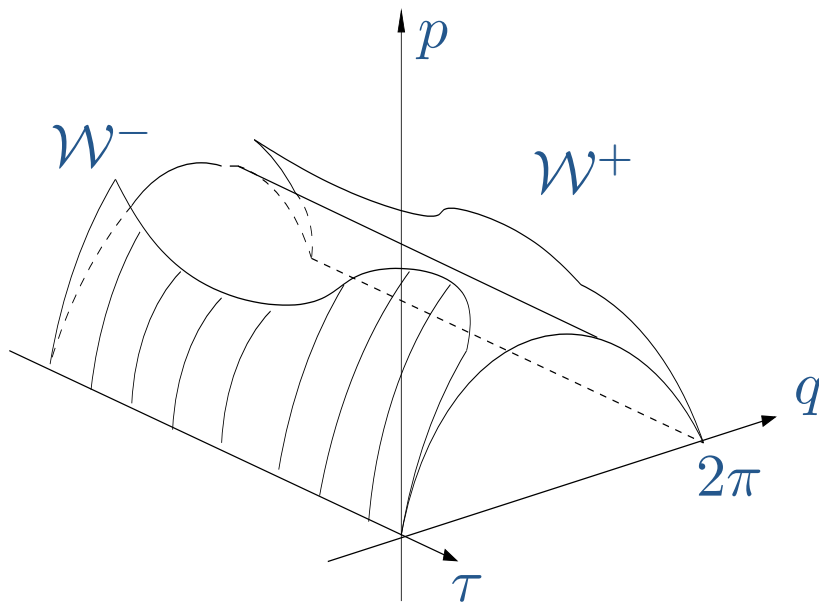
$$|\partial_u \Delta T(u, \tau) - \partial_u F(u, \tau)| \leq C_0 \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$$

con $\partial_u F(u, \tau) = \varepsilon^{-2} f_0(\mu) i \left[-e^{i\tau} e^{-i\frac{u}{\varepsilon}} + e^{-i\tau} e^{i\frac{u}{\varepsilon}} \right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$

donde $f_0(\mu) = -2\pi i \mu + O(\mu^3)$.

Ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H_{\mu,\varepsilon}(q, p, \tau) = \frac{p^2}{2} + \cos q - 1 + \mu(1 - \cos q) \sin \tau.$$



Variedades invariantes estable e inestable: $p = \partial_q T^\pm(q, \tau; \mu, \varepsilon)$.
 T^\pm son soluciones de la Ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_\tau T + \varepsilon H_{\mu,\varepsilon}(q, \partial_q T, \tau) = 0$$

con la condición asintótica:

$$\lim_{q \rightarrow 0, 2\pi} \partial_q T^\pm(q, \tau; \mu, \varepsilon) = 0$$

y 2π -periódicas en τ .

Tornar