

Singularidades y despliegues

Santiago Ibáñez

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

DDAYS 2006

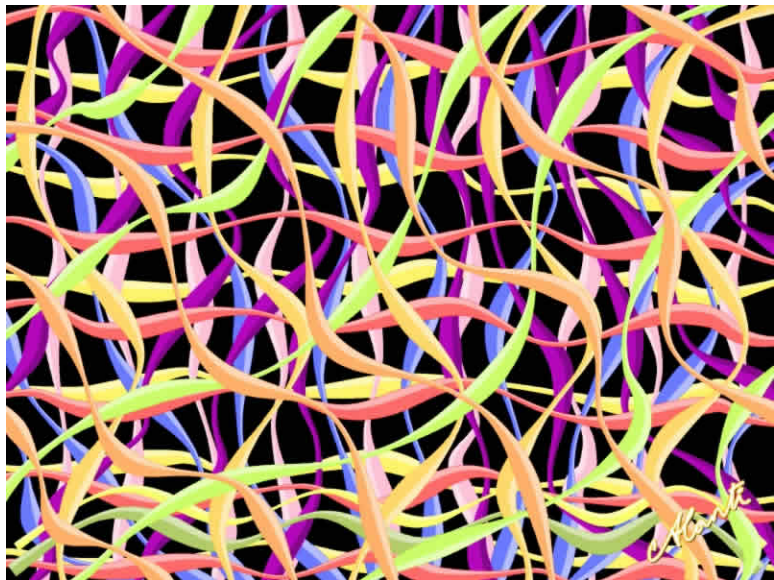
Conjunto de bifurcación

Sea \mathcal{X} un conjunto de sistemas dinámicos definidos sobre una variedad regular M .

Supondremos \mathcal{X} provisto de una topología y también de una relación de equivalencia establecida en términos de propiedades dinámicas significativas.

Un sistema se dice *estructuralmente estable* si pertenece al interior de su clase de equivalencia y se denomina *conjunto de bifurcación* al subconjunto $B \subset \mathcal{X}$ de sistemas no estructuralmente estables.

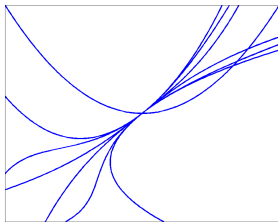
“Imaginando” un conjunto de bifurcación



Alan T Horwell (<http://www.aifweb.com/galleries/expressions/tancol.html>)

“Muestras” k -paramétricas

Método: Considerar familias k -paramétricas $X_\lambda \subset \mathcal{X}$ de sistemas dinámicos y determinar sus posibles intersecciones con B .



Motivación adicional: No olvidemos que los modelos que surgen en las aplicaciones surgen como familias k -paramétricas de sistemas dinámicos.

¿Donde tomar las “muestras”?

Un sistema dinámico pertenecerá al conjunto de bifurcación bien por **características locales** o bien por **características globales**.

configuraciones locales → bifurcaciones locales

configuraciones globales → bifurcaciones globales

Estabilidad estructural local

En lo que sigue supondremos que nuestro espacio ambiente es \mathbb{R}^n y que nuestro conjunto de sistemas dinámicos \mathcal{X} es el formado por los campos de vectores en \mathbb{R}^n de clase C^∞ .

Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ y $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$.

X_1 en p_1 y X_2 en p_2 son **localmente C^0 equivalentes** si existen entornos U_1 de p_1 y U_2 de p_2 y un homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$, tales que h envía órbitas del campo X_1 restringido a U_1 en órbitas del campo X_2 restringido a U_2 conservando el sentido de recorrido de las mismas.

Singularidades no hiperbólicas

Desde la perspectiva local caracterizamos como primeros elementos del conjunto de bifurcación a todos aquellos campos que presentan singularidades no hiperbólicas.

El termino bifurcaciones locales hace entonces referencia a la estructura que el conjunto de bifurcación adquiere en torno a los campos que presentan singularidades no hiperbólicas.

Cuestiones básicas relativas a bifurcaciones locales

- Clasificación de singularidades: Establecer una estratificación en el espacio de singularidades conforme a la codimensión de las mismas.
- Despliegue de singularidades: Dada una singularidad X de codimensión k y una familia k -paramétrica X_λ de campos, con $X_{\lambda_0} = X$, se pretende el análisis sistemático de todas las posibles bifurcaciones *locales y globales* que, bajo condiciones genéricas, se producen en un entorno de λ_0 .

Decimos que una singularidad es de codimensión k si no puede ser evitada (al nivel la C^0 equivalencia local) en familias k -paramétricas genéricas, pero sí en familias dependientes de menos parámetros.

Clasificación de singularidades

Clasificación de singularidades

Gérmenes

Sea X un campo de vectores C^∞ en \mathbb{R}^n con $X(0) = 0$. El conjunto de los campos de vectores que coinciden con X en algún entorno de 0 se denomina **germen** de X en 0 . El espacio de gérmenes se denota por G^n . Un germen se denota por cualquiera de sus representantes.

Topología: Espacios finito-dimensionales de k -jets

Dos gérmenes X e Y se dicen **k -jet equivalentes** si sus desarrollos de Taylor a orden k son coincidentes. La clase de equivalencia de cada $X \in G^n$ se denomina k -jet de X en 0 . El espacio G^n se considera provisto de la **topología** menos fina que hace continuas todas las proyecciones.

Relación de equivalencia

Equivalencia topológica local

Clasificación de singularidades: Estratificación

$$G^n = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

- Cada V_i es un subconjunto semialgebraico (o semianalítico) cerrado.
- $\text{codimensión}(V_i) = i$.
- Cada germen $X \in V_i - V_{i+1}$ es $(V_i - V_{i+1})$ -estable.

Clasificación de singularidades: Historia

- Takens (1974)

$$G^m = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \quad \text{con equivalencia débil}$$

- Dumortier (1997)

$$G^2 = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset V_5 \supset V_5$$

- Dumortier-Ibáñez (1996, 1998, 1999)

$$G^3 = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset V_5 \supset V_5$$

Clasificación de singularidades: Técnicas

- Reducciones a variedad central.
- Reducciones a forma normal
- Explosiones de singularidades.
- Técnicas específicas para ciertas singularidades.

Clasificación de singularidades: Algunos problemas abiertos

- Continuar con el proceso de clasificación.
- Codimensiones máximas de prolongación:
 - $= 3$ en dimensión 5 (o superior) (Takens, 1974)
 - ≤ 10 en dimensión 4 (Takens, 1974).
 - ≤ 60 en dimensión 3 (Dumortier, 1986).
 - ∞ en dimensión 2 (Dumortier, 1975).
 - ∞ en dimensión 1.
- Cuestiones derivadas de las propias técnicas empleadas.

Despliegues de singularidades

Despliegues de singularidades: Dimensión 1

- No hay dificultades.
- El teorema de preparación de Malgrange conduce a modelos canónicos (familias versales).
- Codimensión uno: Bifurcación de nodo-silla.
- Codimensión dos: Bifurcación de cúspide.
- ...
- También bifurcaciones bajo restricciones: transcítica, pitchfork, ...

Despliegues de singularidades: Dimensión 2

- Bifurcaciones de singularidades semihiperbólicas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|(x, y)\|^2) + O(\|\mu\|)$$

Problema 1-dimensional. Los diagramas de bifurcación pueden ser determinados para cualquier codimensión.

- Bifurcaciones de singularidades Hopf-Takens:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|(x, y)\|^2) + O(\|\mu\|)$$

Los diagramas de bifurcación pueden ser determinados para cualquier codimensión (Takens, 1973)

Despliegues de singularidades: Dimensión 2 (continuación)

- Bifurcaciones de singularidades nilpotentes:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|(x, y)\|^2) + O(\|\mu\|)$$

- Codimensión 2: Bifurcación de Bogdanov-Takens (Bogdanov 1975, Takens 1974)
- Codimensión 3: Diagramas de bifurcación conocidos casi en su totalidad (Dumortier, Roussarie y Sotomayor, 1987 y 1991)
- Codimensión 4: Sólo un caso estudiado (Dumortier, Fidellaire y Li, 2001)

Surgen intereses específicos:

- Tres es la dimensión mínima en la que cabe esperar la aparición de comportamientos caóticos (en el contexto de los campos de vectores).
- Demostrar analíticamente la existencia de atractores extraños es una tarea de gran dificultad.

Atractores extraños y despliegues de singularidades

Despliegue genérico de órbitas Shilnikov \Rightarrow Atractores extraños

Mora y Viana

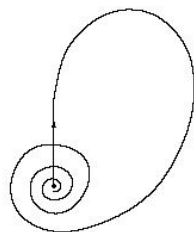
(1993)

Pumariño y Rodríguez

(1997 y 2001)

Homburg

(2002)



Despliegue genérico de ciertas singularidades \Rightarrow Despliegue genérico de órbitas Shilnikov

Dumortier, Ibáñez y Kokubu

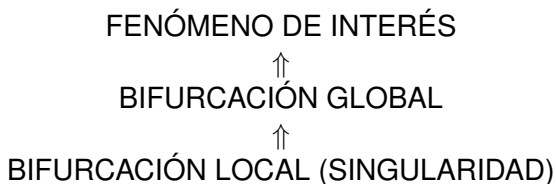
(2001 y 2006)

Ibáñez y Rodríguez

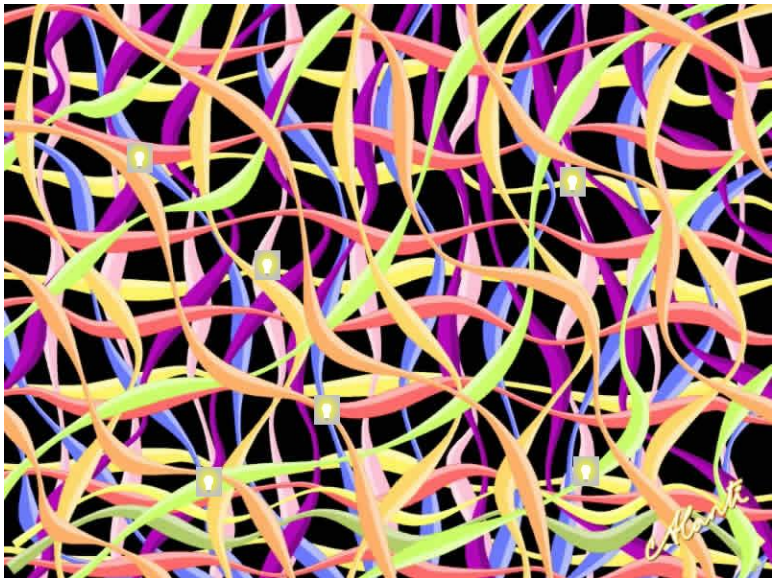
(1995 y 2005)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \dots$$

En un escenario general:



¿cuál es la singularidad más simple (de más baja codimensión) que despliega genéricamente dicho fenómeno?



Despliegues de singularidades: Dimensión 3

¿cuál es la singularidad de menor codimensión que despliega genéricamente atractores extraños?

Equivalentemente, ¿cuál es la singularidad de menor codimensión que despliega genéricamente bifurcaciones genéricas de órbitas Shilnikov?

Las singularidades más simples **propias de dimensión tres** son aquellas cuya parte lineal es linealmente conjugada a

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 Singularidades Hopf-cero o Hopf-nodo-silla.
Forman un estrato de codimensión dos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 Singularidades nilpotentes o triple cero.
Forman un estrato de codimensión tres

Singularidades Hopf-Zero

Cualquier despliegue X_λ de una singularidad X_0 de tipo Hopf-cero puede escribirse como

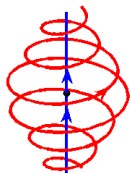
$$X_\lambda = P_\lambda^k + O(\|(x, y, z)\|)^{k+1}$$

donde

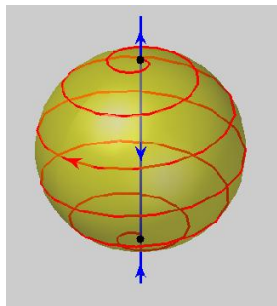
- P_λ^k es un campo cuyas componentes son polinomios de grado k en las variables (x, y, z) .
- P_λ^k es un campo invariante por rotaciones alrededor del eje z .
- k puede escogerse arbitrariamente grande.

Para la dinámica local de X_0 existen 6 tipos topológicos.

Singularidades Hopf-Zero: Caso interesante



Dinámica local de X_0 en uno de los seis tipos topológicos de codimensión dos.



DINÁMICA DE \hat{P}

Recordemos que:

$$X_\lambda = P_\lambda^k + O(\|(x, y, z)\|)^{k+1}$$

Con un escalado adecuado:

$$P_\lambda^k = \hat{P} + 0(\varepsilon).$$

Singularidades Hopf-cero: dificultades y resultados

Hoy en día todavía no existe ningún resultado que establezca condiciones analíticas definitivas para decidir si un despliegue dado contiene (o no) órbitas homoclínicas de tipo Shilnikov.

Dificultades:

- Ninguna condición genérica puede ser trazada sobre un jet finito.
- Hay que abordar problemas de escisiones exponencialmente pequeñas.

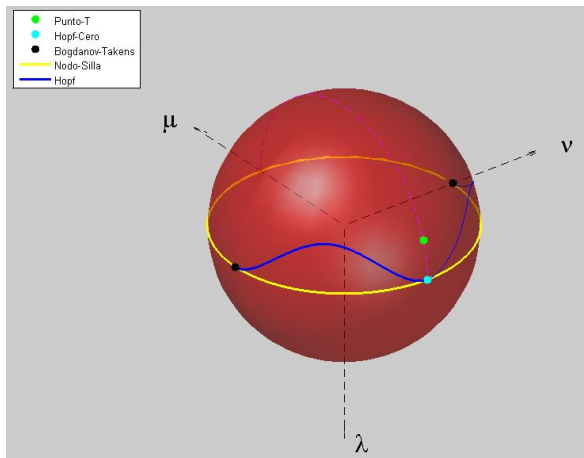
Resultados:

- Broer y Vegter (1984)
- Gaspard (1993)
- Champneys y Kirk (2004)
- Baldomá y Seara (2005)
- Dumortier, Ibáñez, Kokubu y Simó (en elaboración)

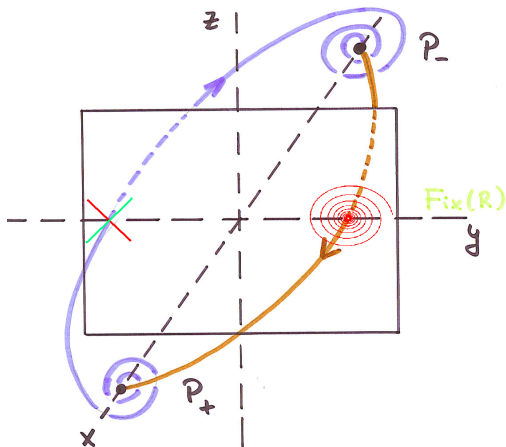
Singularidad nilpotente de codimensión tres

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = \lambda + \mu y + \nu z + x^2 + O(\varepsilon) \end{cases}$$

con $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.



Singularidad nilpotente de codimensión tres: Punto-T



- Dumortier, Ibáñez y Kokubu (2001)
- Ibáñez y Rodríguez (2005)
- Dumortier, Ibáñez y Kokubu (2006)

Algunos problemas abiertos

- 1 Despliegues en dimensión dos: Problema 16 de Hilbert.
- 2 Hopf-cero de codimensión dos: Ruptura de simetría.
- 3 Hopf-cero de codimensión tres: Sólo se han estudiado los despliegues simétricos (Gavrilov, 1987 y Krauskopf y Rousseau 1997).
- 4 Completar el diagrama de bifurcación de la singularidad nilpotente de codimensión tres en \mathbb{R}^3 . Esto incluye nuevos estudios de bifurcaciones globales.
- 5 Formas normales hiperreducidas.
- 6 Estudio de singularidades de mayor codimensión o en dimensiones superiores cuando esté justificado por su relevancia en aplicaciones: singularidad nilpotente de codimensión cuatro en \mathbb{R}^4 y singularidad de Bogdanov-Takens-Hopf en (Drubi, Ibáñez y Rodríguez, 2006).
- 7 Búsqueda de nuevas aplicaciones.

Acoplamiento de dos brusselators

$$\begin{cases} x'_1 &= A - (B + 1)x_1 + x_1^2 y_1 & + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y'_1 &= Bx_1 - x_1^2 y_1 & + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x'_2 &= A - (B + 1)x_2 + x_2^2 y_2 & + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y'_2 &= Bx_2 - x_2^2 y_2 & + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{cases}$$

siendo A y B parámetros positivos asociados a las ecuaciones del Brusselator y λ_1 y λ_2 parámetros de difusión positivos.