Sobre una aproximación álgebro-analítica a los sistemas dinámicos

Juan J. Morales Ruiz, UPC

October 17, 2006

Heurística

$X(z)$: sistema dinámico "integrable", $\dot{z} = X(z)$, $\Gamma : z = z(t)$, solución particular $\Longrightarrow$ La ecuación en variaciones (EV) a lo largo de Γ, $\dot{\xi} = X'(z(t))\xi$ es también "integrable "

Solución de la ecuación en variaciones: parte lineal del flujo del campo X a lo largo de Γ

Significado del anterior principio: si la dinámica del sistema no lineal no es complicada $\Rightarrow$ la dinámica lineal tampoco puede ser complicada

Sistemas Hamiltonianos: integrabilidad $\Longleftrightarrow$ integrabilidad de Liouville

Ecuaciones diferenciales lineales: integrabilidad en el sentido de la teoría de Galois diferencial de ecuaciones diferenciales lineales (teoría de Picard-Vessiot)

Reducción: ecuación en variaciones (EV) $\rightarrow$ ecuación en variaciones normales (EVN)

Criterio de no integrabilidad

Teoría de Galois diferencial

Cuerpo diferencial: $(K, d/dt)$

Ejemplo:$K =$ cuerpo de funciones meromorfas $M(\Gamma)$ sobre una superficie de Riemann Γ (caso particular: funciones racionales $\mathbf{C}(t) =$ cuerpo de funciones meromorfas sobre la esfera de Riemann $\mathbf{P}^1$)

Ecuación diferencial lineal a coficientes en K:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi, \quad A \in Mat(m, K), \tag{1}$$

Extensión de Picard-Vessiot de (1): $L := K(u_{ij})$,

$U := (u_{ij})$: matriz fundamental de (1) ($K \subset L \sim$ la extensión de Galois de un polinomio)

Automorfismo diferencial $\sigma : L \to L$:

i) automorfismo del cuerpo L

ii) $\sigma d/dt = d/dt\sigma$

Grupo de Galois de la ecuación diferencial (1):

$G := Gal(1) = Gal(L/K) = \{\sigma : L \to L : \sigma$ automorfismo diferencial que es la identidad sobre $K\}$ ($\sim$ grupo de Galois de una ecuación polinómica)

G es el grupo de transformaciones de L que deja invariantes todas las relaciones entre u_{ij}, du_{ij}/dt, d^2u_{ij}/dt^2, etc... : grupo de simetrias "internas" de la ecuación diferencial (1)

Teorema 1

G es un subgrupo algebraico lineal de $GL(m, \mathbf{C})$

(1) *integrable*: extensión L se obtiene de K por extensiones algebraicas, cuadraturas y exponenciales de cuadraturas

Teorema 2

(1) *es integrable* $\Leftrightarrow$ G^0 *es resoluble*

No integrabilidad

X_H: campo Hamiltoniano sobre una variedad

simpléctica M de dimensión (compleja) $2n$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i},$$

$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$i = 1, ..., n.$

$H : M \to \mathbf{C}$: función de Hamilton

$$\dot{z} = X_H(z),$$

$z = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$

X_H *es integrable*: $\exists f_1 = H, f_2, ..., f_n$ meromorfas sobre M, t.q. $\{f_i, f_j\} = 0$, $i, j = 1, 2, .., n$ (f_i, f_j están en involución)

Paréntesis de Poisson: $\{f, g\} = L_{X_f} g$

Teorema Principal (M-Ramis, 1998)

X_H *un sistema Hamiltoniano completamente integrable y* Γ *una curva integral de* X_H*, y* $G := Gal(EV)$*,* $G_N := Gal(EVN)$ *los grupos de Galois de la ecuación en variaciones a lo largo de* Γ *y de la ecuación en variaciones normal a lo largo de* Γ $\Longrightarrow$ *los grupos* G^0 *y* G_N^0 *son conmutativos*

Observación: (EV), (EVN) son integrables

Comentarios históricos

- Lyapounov (1894)

- Poincaré (1897)

- Ziglin (1982)

- Morales (1989)

- Churchill, Rod (1991)

- Morales y Simó (1994)

- Baider, Churchill, Rod y Singer (1996)

Aplicación: potenciales homogéneos

$$H(x,y) = T + V = \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + V(x_1, ..., x_n), \tag{2}$$

V: función homogénea de grado $k \in \mathbf{Z}$

$c = (c_1, ..., c_n)$: solución de la ecuación $c = V'(c)$

$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$: valores propios de $V''(c)$

Teorema 4 (M-Ramis, 1998)

Si el sistema Hamiltoniano definido por (2) es integrable $\Longrightarrow$ Cada par (k, λ_i) está dentro de alguno de los casos siguientes:

(1) $(k, p + p(p-1)k/2)$,

(2) (2,número complejo arbitrario),

(3) (-2,número complejo arbitrario),

(4) $(-5, \frac{49}{40} - \frac{1}{40}(\frac{10}{3} + 10p)^2)$,

(5) $(-5, \frac{49}{40} - \frac{1}{40}(4 + 10p)^2)$,

(6) $(-4, \frac{9}{8} - \frac{1}{8}(\frac{4}{3} + 4p)^2)$,

(7) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(2 + 6p)^2)$,

(8) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{3}{2} + 6p)^2)$,

(9) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{6}{5} + 6p)^2)$,

(10) $(-3, \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(\frac{12}{5} + 6p)^2)$,

(11) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(2 + 6p)^2)$,

(12) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{3}{2} + 6p)^2)$,

(13) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{6}{5} + 6p)^2)$,

(14) $(3, -\frac{1}{24} + \frac{1}{24}(\frac{12}{5} + 6p)^2)$,

(15) $(4, -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}(\frac{4}{3} + 4p)^2)$,

(16) $(5, -\frac{9}{40} + \frac{1}{40}(\frac{10}{3} + 10p)^2)$,

(17) $(5, -\frac{9}{40} + \frac{1}{40}(4 + 10p)^2)$,

(18) $(k, \frac{1}{2}(\frac{k-1}{k} + p(p+1)k))$,

p: entero arbitrario.

Otras aplicaciones de los teoremas anteriores

- Mecánica Celeste y problemas de N-cuerpos (Juillard, Boucher, Tsygvintsev, Vigo-Aguilar, Sansaturio, Ferrandiz, Maciejewski, Arribas, Elipe, Riaguas, J.-A. Weil, Maciejewski, Przybylska, Audin, Yoshida, Nakagawa, Ziglin, M-Simó-Simón, M-Simón, ...)

- Modelos cosmológicos (M-Ramis, Maciejewski, Strelcyn, Szydlowski,...)

- Modelos físicos (Ferrer, Mondejar, Almeida, Stuchi, Saenz, Audin, Maciejewski,...)

Problemas en estudio

- Integrabilidad de la ecuación de Schrödinger

- Integrabilidad de sistemas no Hamiltonianos (Tsygvintsev,Maciejewski, Przybylska, Zhung,...)

- Teoría de perturbaciones

Página Web

http://www.umpa.ens-lyon.fr/

~atsygvin/pageanr/main.html