

## Bifurcaciones pitchfork y SNAs(=ANCEs)

A. JORBA



F.J. MUÑOZ-ALMARAZ



J.C. TATJER



Islantilla (Lepe, Huelva)  
18 al 21 de octubre de 2006

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

### Continuación de curvas autosimétricas

#### Resultados de continuación numérica

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

### Continuación de curvas autosimétricas

#### Resultados de continuación numérica

### Resultados teóricos sobre persistencia de curvas invariantes autosimétricas

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

### Continuación de curvas autosimétricas

Resultados de continuación numérica

Resultados teóricos sobre persistencia de curvas invariantes autosimétricas

### Forma normal

Manipulaciones preliminares

Linealización

Términos superiores

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

### Continuación de curvas autosimétricas

Resultados de continuación numérica

Resultados teóricos sobre persistencia de curvas invariantes autosimétricas

### Forma normal

Manipulaciones preliminares

Linealización

Términos superiores

Persistencia de la bifurcación “Pitchfork”

## Resultados de T. Jäger sobre SNAs

### Continuación de curvas autosimétricas

Resultados de continuación numérica

Resultados teóricos sobre persistencia de curvas invariantes autosimétricas

### Forma normal

Manipulaciones preliminares

Linealización

Términos superiores

Persistencia de la bifurcación “Pitchfork”

Conclusiones

# Resultados de T. Jäger

Nonlinearity, 16 pp.1239–1255

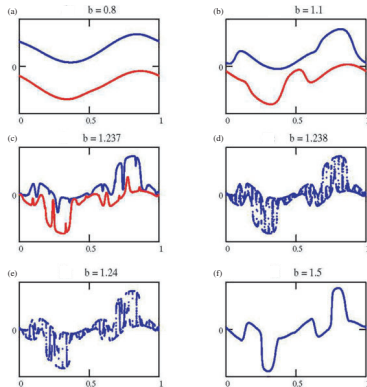
Quasiperiodically forced interval maps

1241

Jäger (2003) sugiere que el sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{a \tan(ax_n)}{a \tan(a)} + b \sin(2\pi\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \omega \end{cases}$$

(donde  $\omega$  es el número de oro) tiene una gráfica invariante atractora no continua con  $a = 10$  y un  $b$  adecuado.



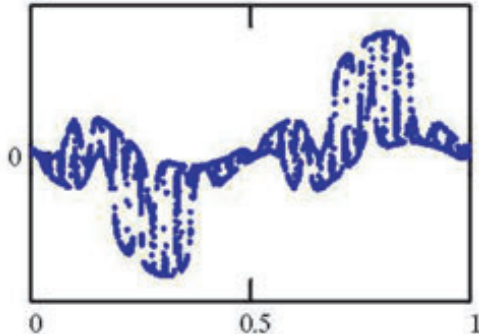
**Figure 1.** Systems of the form  $(\theta, x) \mapsto (\theta + \omega, \arctan(ax)/\arctan(a) + b \cdot \sin(2\pi\theta))$  have negative Schwarzian derivative on the fibres. Here, 10 000 iterations of the starting points  $(0, 3)$  and  $(0, -3)$  trace out pictures of the upper and lower bounding graphs, respectively. These two graphs are stable; another invariant graph which is unstable lies in between (see theorem 4.2). The parameter  $a = 10$  is the same for all pictures (a)–(f). Upon increasing the parameter  $b$  the two distinct graphs come closer together (a)–(c). When they collide, non-continuous invariant graphs seem to occur over a small parameter range (d) and (e), until only one continuous invariant graph remains (f). This phenomenon has been observed in other parameter families of quasiperiodically forced



## Extracto del pie de figura

graphs come closer together (a)–(c). When they collide, non-continuous invariant graphs seem to occur over a small parameter range (d) and (e), until only one continuous invariant graph remains (f). This phenomenon has been observed in other parameter families of quasiperiodically forced systems as well, and is called creation of an SNA via torus collision (see [4]).

(d)

 $b = 1.238$ 

Ejemplo de posible SNA conjeturado en el artículo. En su tesis T. Jäger prueba que en una situación similar existe algún valor del parámetro para el que existe una gráfica invariante atractora discontinua.

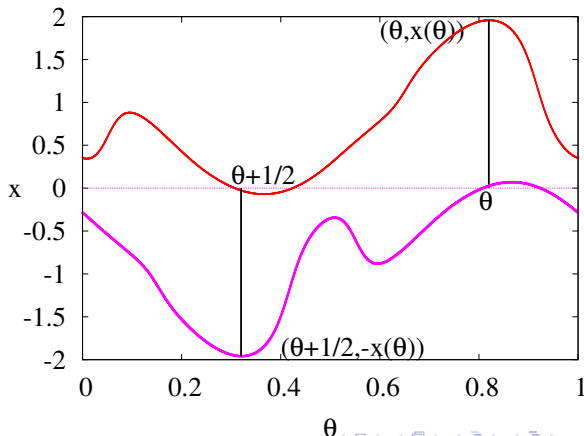


Es importante notar la simetría del sistema;  
Si  $x(\theta)$  es una gráfica invariante, entonces

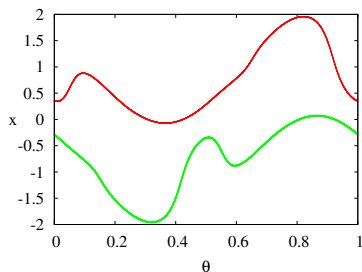
$$y(\theta) = -x(\theta + 1/2)$$

también es una gráfica invariante.

Para  $a = 10$   
y  $b = 1.1$

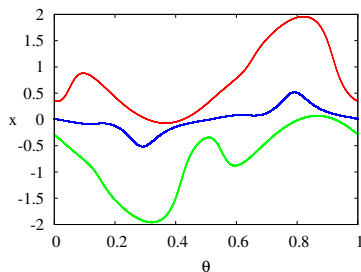


En las gráficas anteriores Jäger representó sólo las gráficas invariantes atractoras.



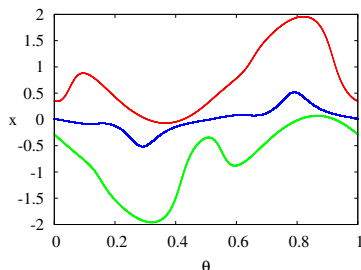
En las gráficas anteriores Jäger representó sólo las gráficas invariantes atractoras. (No están las repulsoras).

Sus resultados prueban que en este ejemplo hay una gráfica invariante autosimétrica.



En las gráficas anteriores Jäger representó sólo las gráficas invariantes atractoras. (No están las repulsoras).

Sus resultados prueban que en este ejemplo hay una gráfica invariante autosimétrica.



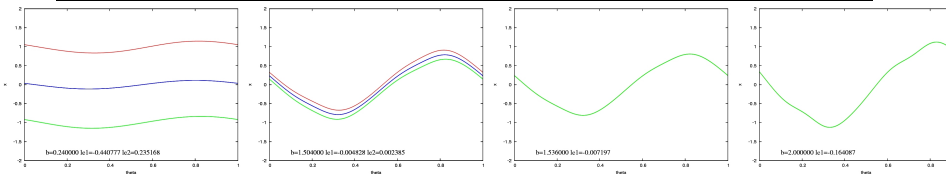
El desarrollo en serie de Fourier de la curva autosimétrica es:

$$x(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} c_k e^{2\pi(2k-1)\theta i} + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{c}_k e^{2\pi(1-2k)\theta i}$$

siendo  $c_k \in \mathbb{C}$ .

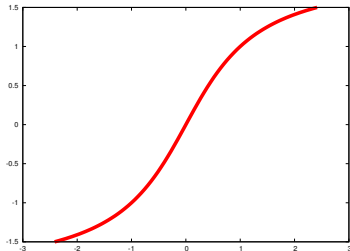
## Aparente “Pitchfork” suave

Para otros valores de los parámetros, como  $a = 1$ , lo que se observa es una Pitchfork de curvas invariantes.

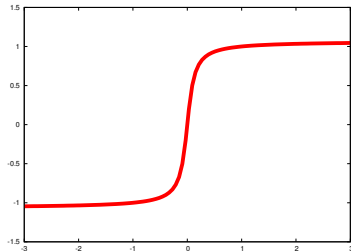


## Comentarios sobre la dinámica

$a=1$



$a=10$



Al aumentar el valor de  $a$ , la diferencia entre los valores de las pendientes aumenta. Para  $a = 10$  la curva invariante visitará regiones cuya tangente es casi horizontal y otras en las que es casi vertical.

Para funciones lineales a trozos observamos el mismo comportamiento: Bifurcaciones “pitchfork” normales y aparentes SNAs dependiendo de la variación en las pendientes.



## Cambio de variables.

Con

$$X = a \tan(a)x, \quad A = \frac{a}{a \tan(a)}, \quad B = \frac{b}{a \tan(a)}$$

queda el sistema

$$\begin{cases} X_{n+1} = a \tan(A X_n) + B \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \end{cases}$$

Desde ahora llamaremos  $\tilde{\omega} = 2\pi\omega$ .

## Sobre la continuación de curvas autosimétricas continuas.

Nos planteamos el estudio de las bifurcaciones “Pitchfork” con la simetría anterior.

En primer lugar estudiamos la solución autosimétrica:

- ¿Pueden existir diferentes ramas de curvas invariantes autosimétricas continuas que bifurquen (puntos de ramificación)?

## Sobre la continuación de curvas autosimétricas continuas.

Nos planteamos el estudio de las bifurcaciones “Pitchfork” con la simetría anterior.

En primer lugar estudiamos la solución autosimétrica:

- ¿Pueden existir diferentes ramas de curvas invariantes autosimétricas continuas que bifurquen (puntos de ramificación)?

No, porque existe a lo más una curva invariante autosimétrica continua.

## Sobre la continuación de curvas autosimétricas continuas.

Nos planteamos el estudio de las bifurcaciones “Pitchfork” con la simetría anterior.

En primer lugar estudiamos la solución autosimétrica:

- ¿Pueden existir diferentes ramas de curvas invariantes autosimétricas continuas que bifurquen (puntos de ramificación)?  
No, porque existe a lo más una curva invariante autosimétrica continua.
- ¿Es posible **demostrar** la persistencia de las soluciones autosimétricas continuas?

## Sobre la continuación de curvas autosimétricas continuas.

Nos planteamos el estudio de las bifurcaciones “Pitchfork” con la simetría anterior.

En primer lugar estudiamos la solución autosimétrica:

- ¿Pueden existir diferentes ramas de curvas invariantes autosimétricas continuas que bifurquen (puntos de ramificación)?

No, porque existe a lo más una curva invariante autosimétrica continua.

- ¿Es posible **demostrar** la persistencia de las soluciones autosimétricas continuas?

Responderemos la cuestión, pero para las analíticas.

## Sobre la continuación de curvas autosimétricas continuas.

Nos planteamos el estudio de las bifurcaciones “Pitchfork” con la simetría anterior.

En primer lugar estudiamos la solución autosimétrica:

- ¿Pueden existir diferentes ramas de curvas invariantes autosimétricas continuas que bifurquen (puntos de ramificación)?

No, porque existe a lo más una curva invariante autosimétrica continua.

- ¿Es posible **demostrar** la persistencia de las soluciones autosimétricas continuas?

Responderemos la cuestión, pero para las analíticas.

- Implementar un método **numérico** de continuación de curvas críticas.

## Un esquema de continuación numérica

Nos planteamos encontrar curvas invariantes autosimétricas con exponente de Liapunov cero.

Partición del intervalo  $[0, \pi]$  con  $2n$  subintervalos.  $\theta_j = \frac{j\pi}{2n}$ .

La continuación “equivale” a encontrar ceros de la función.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \begin{bmatrix} F(\theta_0, a, b, \mathbf{c}) \\ \vdots \\ F(\theta_{2n-1}, a, b, \mathbf{c}) \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \log \left| \frac{a}{1 + a^2 x(\theta_j, \mathbf{c})^2} \right| \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$$

donde  $F(\theta, a, b, \mathbf{c}) = x(\theta + \tilde{\omega}, \mathbf{c}) - a \tan(ax(\theta, \mathbf{c})) - b \sin(\theta)$

$$x(\theta, \mathbf{c}) = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} c_k e^{(2k-1)\theta i} + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{c_k} e^{(1-2k)\theta i}$$

## Resultados numéricos

- Con un  $n$  suficientemente grande conseguimos una aproximación a la curva invariante.



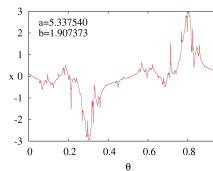
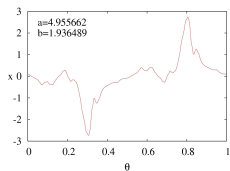
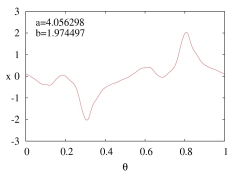
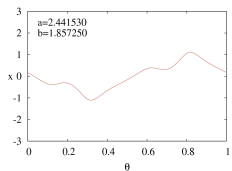
## Resultados numéricos

- Con un  $n$  suficientemente grande conseguimos una aproximación a la curva invariante.
- Es necesario añadir mayor número de nodos según aumenta de longitud la curva.

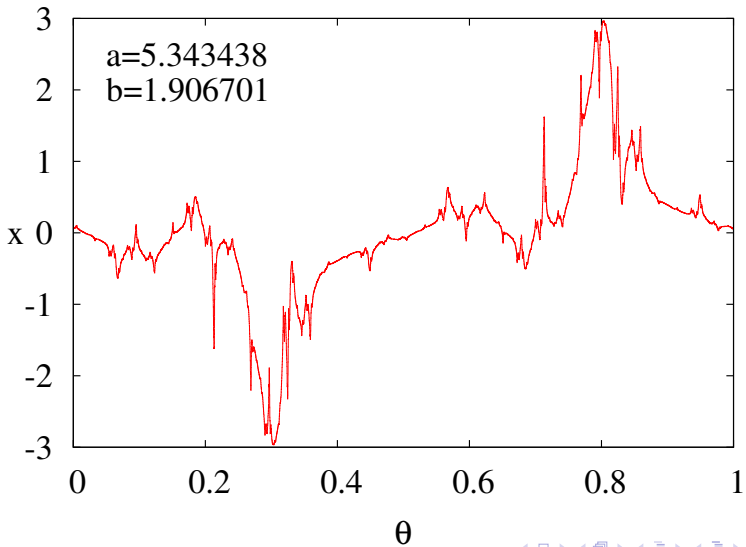
## Resultados numéricos

- Con un  $n$  suficientemente grande conseguimos una aproximación a la curva invariante.
- Es necesario añadir mayor número de nodos según aumenta de longitud la curva.
- La reducibilidad permite “resolver” el sistema que aparece en el método de Newton sin construir la matriz jacobiana. **Ahorro del espacio reservado en la memoria y del tiempo de cálculo.**

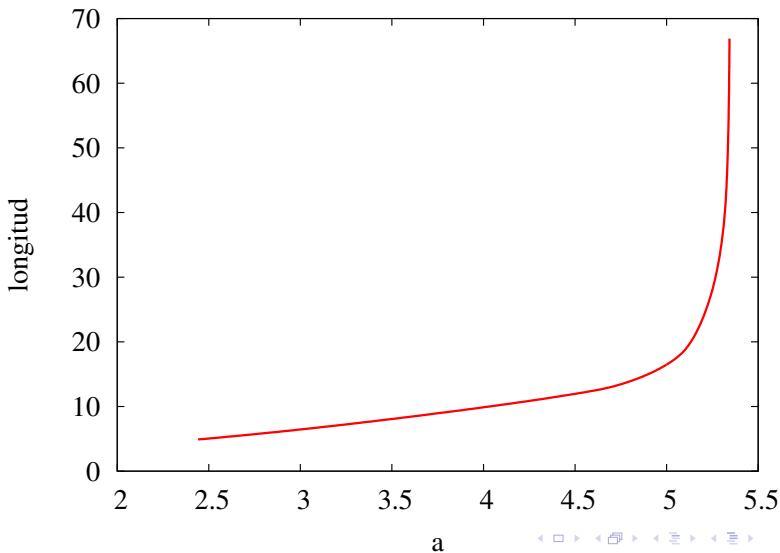
Podemos ver algunas de las soluciones encontradas con el anterior esquema.



Última secuencia:



Al representar el parámetro  $a$  frente a la longitud se observa un comportamiento asintótico.



## Nuevo marco para resultados de persistencia de curvas invariantes autosimétricas:

- Trabajamos con espacios de funciones holomorfas. Denotamos por  $\mathcal{S}_\rho^-$  al espacio de las funciones holomorfas en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$  con periodo  $2\pi$  y tal que  $-x(z) = x(z + \pi)$

## Nuevo marco para resultados de persistencia de curvas invariantes autosimétricas:

- Trabajamos con espacios de funciones holomorfas. Denotamos por  $\mathcal{S}_\rho^-$  al espacio de las funciones holomorfas en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$  con periodo  $2\pi$  y tal que  $-x(z) = x(z + \pi)$
- El operador  $T_{\tilde{\omega}} : \mathcal{S}_\rho^- \rightarrow \mathcal{S}_\rho^-$  se define por  $T_{\tilde{\omega}}x(z) = x(z + \tilde{\omega})$ .

## Nuevo marco para resultados de persistencia de curvas invariantes autosimétricas:

- Trabajamos con espacios de funciones holomorfas. Denotamos por  $\mathcal{S}_\rho^-$  al espacio de las funciones holomorfas en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$  con periodo  $2\pi$  y tal que  $-x(z) = x(z + \pi)$
- El operador  $T_{\tilde{\omega}} : \mathcal{S}_\rho^- \rightarrow \mathcal{S}_\rho^-$  se define por  $T_{\tilde{\omega}}x(z) = x(z + \tilde{\omega})$ .
- Estudiaremos el problema

$$\begin{cases} \text{Hallar } x \in \mathcal{S}_\rho^- \\ T_{\tilde{\omega}}x = \phi \circ x + \psi \end{cases}$$

En el caso de  $\phi(z) = a \tan(az)$  y  $\psi(z) = b \sin(z)$  se corresponde a encontrar curvas invariantes autosimétricas.



## Resultado clave para la persistencia de curva invariante autosimétrica:

Sean  $\delta > 0$

$$U := ] - R, R[ + i ] - I, I[ ,$$

$$x_0, \psi \in \mathcal{S}_{\rho}^{-}$$

$$\phi \in \mathcal{C}^1(\bar{U}), \text{ tal que } \phi(-z) = -\phi(z) \text{ y } \phi'(\bar{U}) \subseteq \mathbb{C} \setminus ] - \infty, 0]$$

Si

$$\|T_{\tilde{\omega}}x_0 - \phi \circ x_0 - \psi\|_{\mathcal{C}^0(\bar{U})}$$

es **suficientemente pequeño**, entonces existe  $x \in \mathcal{S}_{\rho-\delta}^{-}$  tal que

$$T_{\tilde{\omega}}x = \phi \circ x + \psi.$$

:

**Lema (Solución de la ecuación lineal al plantear el método de Newton:)**

Sea  $a$  un función holomorfa en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$ ,  $a(z + \pi) = a(z)$  y  $a(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R}$

Sea  $b \in \mathcal{S}_\rho^-$ .

Entonces existe  $x$  holomorfa en  $\mathbb{R} + i] - \rho, \rho[$  verificando  $x(z + \pi) = -x(z)$  tal que

$$x(z + \tilde{\omega}) = a(z)x(z) + b(z).$$

:

**Lema (Solución de la ecuación lineal al plantear el método de Newton:)**

Sea  $a$  un función holomorfa en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$ ,  $a(z + \pi) = a(z)$  y  $a(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R}$

Sea  $b \in \mathcal{S}_\rho^-$ .

Entonces existe  $x$  holomorfa en  $\mathbb{R} + i] - \rho, \rho[$  verificando  $x(z + \pi) = -x(z)$  tal que

$$x(z + \tilde{\omega}) = a(z)x(z) + b(z).$$

Si la ecuación  $T_{\tilde{\omega}}x = \phi \circ x + \psi$  tiene una solución para cada  $\phi$  y  $\psi$  en un entorno, entonces dicha solución depende con continuidad y diferenciabilidad de  $\phi$  y  $\psi$ .

:

**Lema (Solución de la ecuación lineal al plantear el método de Newton:)**

Sea  $a$  un función holomorfa en  $\mathbb{R} + i[-\rho, \rho]$ ,  $a(z + \pi) = a(z)$  y  $a(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R}$

Sea  $b \in \mathcal{S}_\rho^-$ .

Entonces existe  $x$  holomorfa en  $\mathbb{R} + i] - \rho, \rho[$  verificando  $x(z + \pi) = -x(z)$  tal que

$$x(z + \tilde{\omega}) = a(z)x(z) + b(z).$$

Si la ecuación  $T_{\tilde{\omega}}x = \phi \circ x + \psi$  tiene una solución para cada  $\phi$  y  $\psi$  en un entorno, entonces dicha solución depende con continuidad y diferenciabilidad de  $\phi$  y  $\psi$ .

**CONSECUENCIA:** La solución autosimétrica es persistente.

## Forma normal (Cambio de origen)

En el sistema discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n) + \psi(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega}, \end{cases} \quad \text{donde } \tilde{\omega} = 2\pi\omega$$

Estudiaremos las bifurcaciones fijando  $\phi$ .

Para cada  $\psi$  existe  $x_\psi$  en  $\mathcal{S}_\rho^-$ .

Efectuamos el cambio:  $y = x - x_\psi(\theta)$  transforma el sistema en

$$\begin{cases} y_{n+1} = \phi(y_n + x_\psi(\theta_n)) - \phi(x_\psi(\theta_n)) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

## Forma normal (Desarrollo en serie)

El sistema dependiente de la función  $\psi$  dado en la anterior transparencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n + x_\psi(\theta_n)) - \phi(x_\psi(\theta_n)) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

debido a que para cada par  $(\theta, \psi)$  la función

$$x \mapsto \phi(x + x_\psi(\theta)) - \phi(x_\psi(\theta))$$

se supone analítica, existen unas funciones  $g_k$  tales que el sistema se escribe

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sum_{k \geq 1} g_k(\theta_n, \psi) x_n^k \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

Las funciones  $g_k$  verifican que  $g_k(\theta + \pi, \psi) = (-1)^{k+1} g_k(\theta, \psi)$ .

## Forma normal (Linealización)

La **reducibilidad** del sistema implica que existe  $c(\cdot, \psi) \in \mathcal{S}_{\rho-\delta}^-$  tal que:

$$\lambda c(\theta + \omega, \psi) = g_1(\theta, \psi) c(\theta, \psi),$$

con el cambio  $x = c(\theta, \psi)y$  el sistema que resulta es

$$\begin{cases} y_{n+1} = \lambda(\psi) y_n + \sum_{k \geq 2} h_k(\theta_n, \psi) y_n^k \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

donde  $h_k(\theta, \psi) = g_k(\theta, \psi) \frac{c(\theta, \psi)^k}{c(\theta + \omega, \psi)}$

## Forma normal (Limpieza de ordenes superiores)

Si tenemos un sistema de la forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = p(x_n, \psi) + \sum_{k \geq r+1} f_k(\theta_n, \psi) x_n^k \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

- $p(\cdot, \psi)$  es un polinomio impar de grado menor o igual que  $r$ ;

donde

- $f_k(\theta + \pi, \psi) = (-1)^{k+1} f_k(\theta, \psi)$

entonces hay un cambio  $y = x + c(\theta, \psi)x^{r+1}$  que nos conduce al sistema

$$\begin{cases} y_{n+1} = \tilde{p}(y_n, \psi) + \sum_{k \geq r+2} \tilde{f}_k(\theta_n, \psi) y_n^k \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

donde

- $\tilde{p}(\cdot, \psi)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $r + 1$ ;
- $\tilde{f}_k(\theta + \pi, \psi) = (-1)^{k+1} \tilde{f}_k(\theta, \psi)$



## Persistencia de la bifurcación “Pitchfork” suave

Recordemos que consideramos el forzamiento  $\phi$  como el parámetro. Obtenemos la forma normal

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda(\psi)x_n + \mu(\psi)x_n^3 + x_n^5 G(x_n, \theta_n, \psi) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

con  $G$  acotada y siendo  $\lambda(\psi)$  el exponente de Lyapunov del sistema original.

Dada una curva  $s \mapsto \psi_s$  y sea  $\Lambda(s) = \lambda(\psi_s)$  tal que se verifique:

$$\Lambda(0) = 1, \quad \Lambda'(0) > 0 \text{ y } \mu(\psi_0) > 0$$

entonces hay una curva invariante para  $s < 0$  y tres curvas invariantes para  $s > 0$

## Persistencia de la bifurcación “Pitchfork” suave

Recordemos que consideramos el forzamiento  $\phi$  como el parámetro. Obtenemos la forma normal

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda(\psi)x_n + \mu(\psi)x_n^3 + x_n^5 G(x_n, \theta_n, \psi) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\omega} \end{cases}$$

con  $G$  acotada y siendo  $\lambda(\psi)$  el exponente de Lyapunov del sistema original.

¿Dada una curva  $s \mapsto \psi_s$  y sea  $\Lambda(s) = \lambda(\psi_s)$  tal que se verifique:

$$\Lambda(0) = 1, \quad \Lambda'(0) > 0 \text{ y } \mu(\psi_0) > 0$$

entonces hay una curva invariante para  $s < 0$  y tres curvas invariantes para  $s > 0$  ?

Creemos que Sí

## Conclusiones

- Resultados teóricos sobre persistencia de la bifurcación aportan información de la forma en la que se produce la “fractalización”.

## Conclusiones

- Resultados teóricos sobre persistencia de la bifurcación aportan información de la forma en la que se produce la “fractalización” .
- Queda pendiente analizar la situación cuando la curva tiene menos regularidad.

## Conclusiones

- Resultados teóricos sobre persistencia de la bifurcación aportan información de la forma en la que se produce la “fractalización”.
- Queda pendiente analizar la situación cuando la curva tiene menos regularidad.
- ¿Existe algún procedimiento para la continuación numérica si la gráfica invariante no es continua?