

¿ QUÉ PUEDE APORTAR EL ESTUDIO DE
LAS BIFURCACIONES GLOBALES AL
ANÁLISIS DE LAS DEGENERACIONES
LOCALES ?

FERNANDO FERNÁNDEZ SÁNCHEZ
UNIVERSIDAD DE SEVILLA



SESIÓN:
DESPLIEGUE Y BIFURCACIONES
DE EQUILIBRIOS DEGENERADOS

SUMARIO DE LA CHARLA:

PRESENTACIÓN DE LAS LÍNEAS DE ESTUDIO QUE SIGUE MI GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELACIÓN A LAS DEGENERACIONES LOCALES,

JUSTIFICACIÓN DE LA NECESIDAD DE ESTUDIAR BIFURCACIONES GLOBALES PARA ANALIZAR ALGUNAS DEGENERACIONES LOCALES,

ANÁLISIS DE LOS COMPORTAMIENTOS ORGANIZADOS POR UN TIPO PARTICULAR DE CICLO HETEROCLINO RELACIONADO CON LA SINGULARIDAD NILPOTENTE DE CODIMENSIÓN TRES (TRIPLE-CERO).

LÍNEAS DE ESTUDIO (SEVILLA-HUELVA)

▷ SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS A LOS CIRCUITOS ELECTRÓNICOS. (AÑOS 80)

▷ BIFURCACIONES LOCALES:

DINÁMICA LOCAL, TIPO TOPOLÓGICO

DIAGRAMAS Y CONJUNTOS DE BIFURCACIONES

TÉCNICAS ANALÍTICAS Y COMPUTACIONALES

PARA DETERMINAR FORMAS NORMALES, FORMAS

HIPERNORMALES Y VARIEDADES DE CENTROS.

▷ BIFURCACIONES GLOBALES:

MÉTODOS DE CONTINUACIÓN NUMÉRICA.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS PARA ANALIZAR LA

DINÁMICA ORGANIZADA.

APARICIÓN EN DESPLIEGUES DE DEGENERACIONES

LOCALES.

EJEMPLO 1: BOGDANOV-TAKENS

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + O(x^2 + y^2)$$

DESPLIEGUE VERSAL

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \lambda_1 + \lambda_2 y + x^2 + xy \end{bmatrix}$$

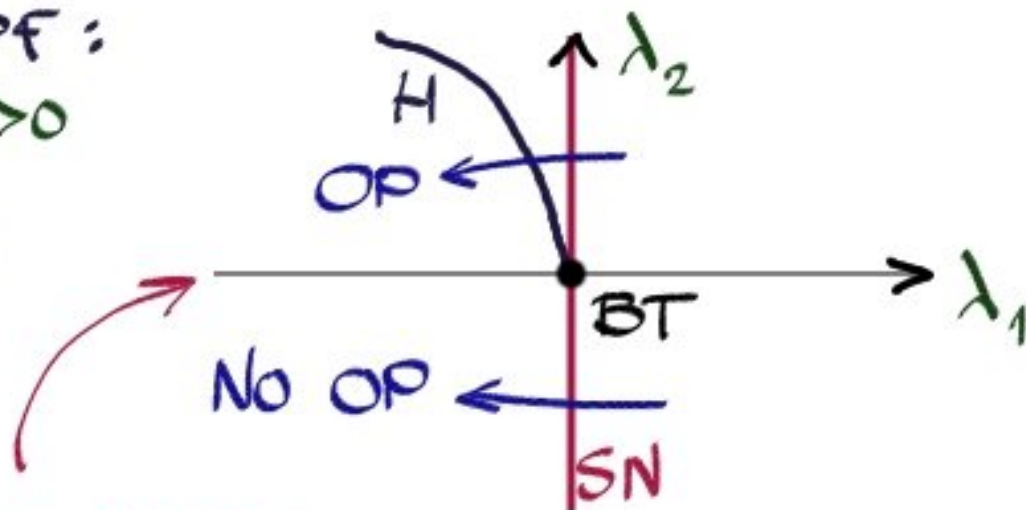
BIFURCACIÓN SILLA-NODO : $\lambda_1 = 0$

BIFURCACIÓN DE HOPF :

$$\lambda_1 = -\lambda_2^2, \lambda_2 > 0$$

BOGDANOV-TAKENS :

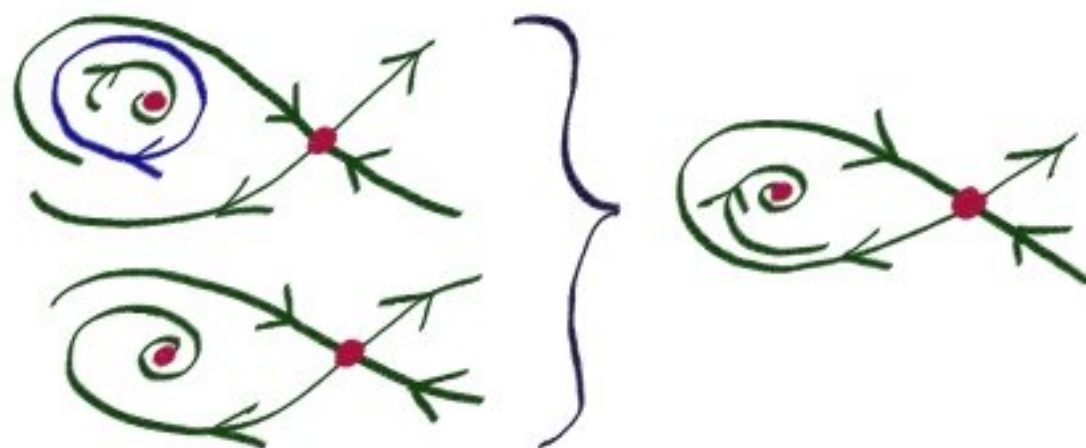
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



FALTA ALGO

PASANDO POR LA
CURVA DE HOPF

PASANDO POR LA
SILLA - NODO $\lambda_2 < 0$



BLOW UP:

$$x = \varepsilon^2 X, \quad y = \varepsilon^3 Y, \quad \lambda_1 = \varepsilon^4 \nu_1, \quad \lambda_2 = \varepsilon^2 \nu_2, \quad \tau = \varepsilon t$$

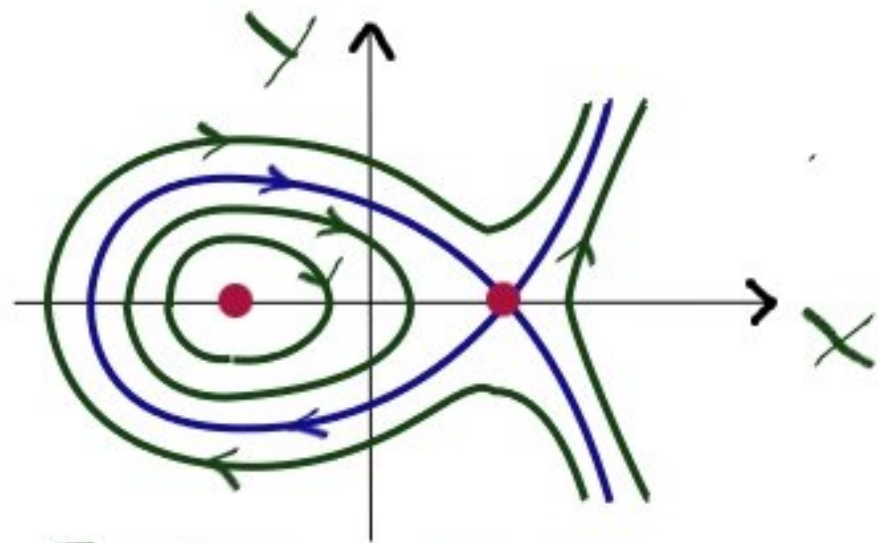
QUEDA:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ \nu_1 + X^2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ Y(\nu_2 - X) \end{bmatrix}$$

HAMILTONIANO

PERTURBACIÓN

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \nu_1 + x^2 \end{bmatrix}$$

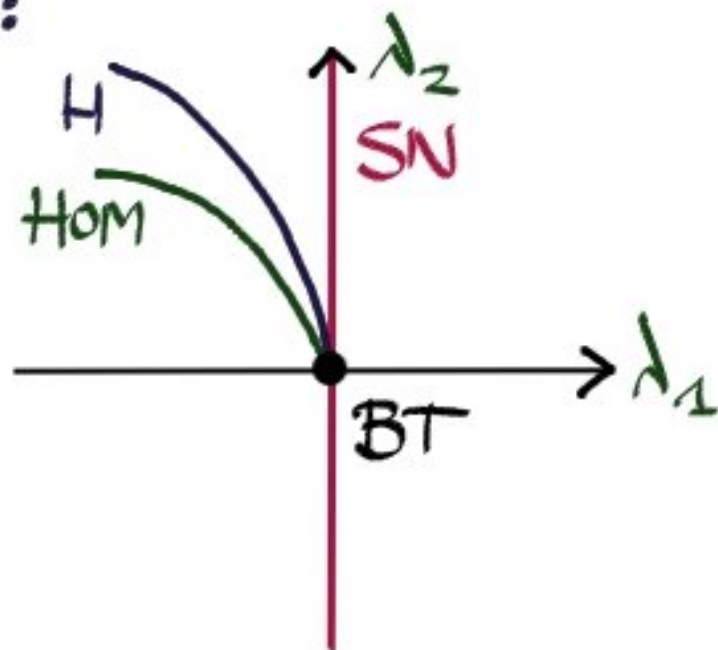


MELNIKOV:

HOMOCLINA PARA $\nu_2 = \frac{5}{7} \sqrt{-\nu_1} + O(\epsilon)$.

EN PARAMETROS ORIGINALES:

$$\lambda_2 = \frac{5}{7} \sqrt{-\lambda_1} + O(\lambda_1)$$



EJEMPLO 2: TRIPLE - CERO

FORMA HIPERNORMAL + DESPLIEGUE

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 x + axz + xy - \frac{x^2}{2} + O(3) \end{bmatrix}$$

BLOW UP:

$$x = \varepsilon^3 X, \quad y = \varepsilon^4 Y, \quad z = \varepsilon^5 Z, \quad T = \varepsilon t$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon^6 c, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2 \lambda, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^2 \mu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ c + \lambda Y - \frac{X^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ O(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

KURAMOTO - SIVASHINSKY PERT.
($\lambda = -1$)

SISTEMA DE KURAMOTO - SIVASHINSKY

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = c - y - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$



$$u_t = -u_{xxxx} - u_{xx} - uu_x$$

EC. KURAMOTO - SIVASHINSKY

•) REVERSIBLE

$$(x, y, z, t) \leftrightarrow (-x, y, -z, -t)$$

•) DIVERGENCIA CERO

•) PARA $c > 0$ TIENE DOS EQUILIBRIOS DE TIPO SILLA - FOLO CON CONFIGURACIONES DE ESTABILIDAD CAMBIADAS

•) SI $c = 0$ TIENE UNA BIFURCACIÓN TIPO HOPF - CERO

•) TIENE UNA CONEXIÓN HETEROCLINA POR LAS VARIETADES UNIDIMENSIONALES

$$x(t) = \alpha (-9 \tanh(\beta t) + 11 \tanh^3(\beta t))$$

$$\text{CON } \alpha = 15 \sqrt{\frac{11}{19^3}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}$$

$$\text{PARA } c = c_k = 2\alpha^2.$$

[KURAMOTO & TSUZUKI, 1976]

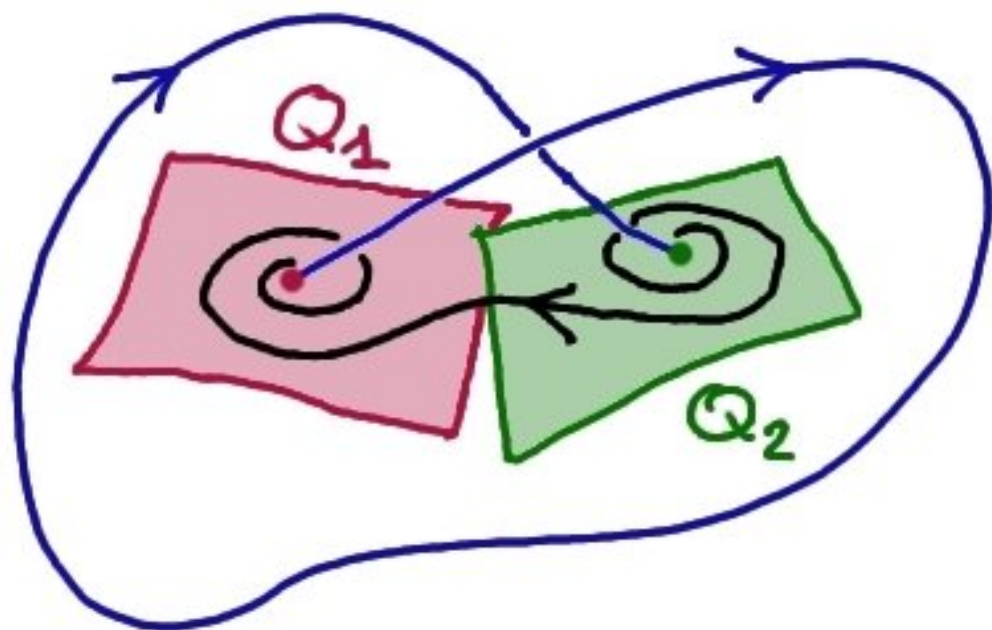
•) PARA c_k EL SISTEMA TIENE, AL MENOS, UNA CONEXIÓN HETEROCLINA INTERSECCIÓN DE LAS VARIETADES BIDIMENSIONALES.

[IBÁÑEZ & RODRÍGUEZ, 2005]

CICLO HETEROCLINO TIPO PUNTO-T

(DOS EQUILIBRIOS TIPO SILLA FOCO)

-) SISTEMA 3D
-) DOS EQUILIBRIOS SILLA CON CONF. DE ESTABILIDAD CAMBIADAS.
-) GENÉRICAMENTE TIENE CODIMENSIÓN DOS. \Downarrow



UN PUNTO EN EL
PLANO DE PARÁMETROS



PUNTO-T

[BYKOV, GLENDINNING & SPARROW,
FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ & AL., ...]

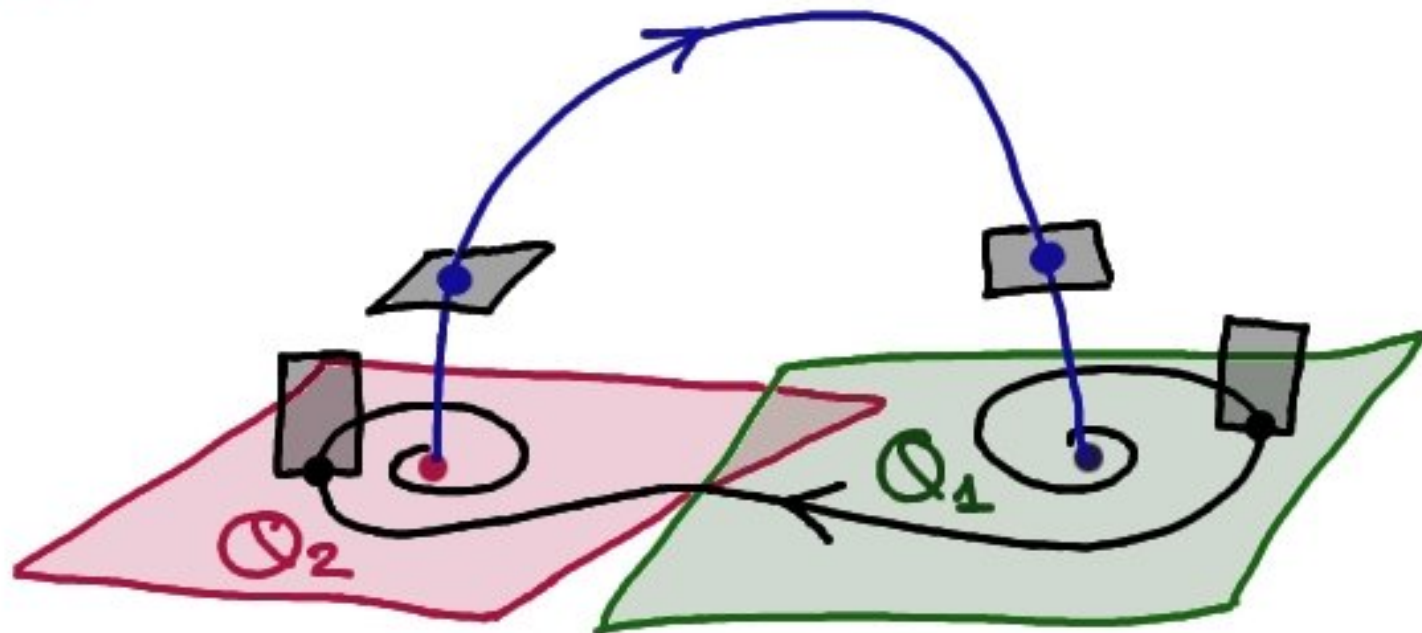
¿CÓMO PROBAR LA EXISTENCIA?

¡¡ MUY DIFÍCIL !!

-) PRUEBA EN KURAMOTO-SIVASHINSKY [IB-ROD]
NO COMPLETA { TRANSVERSALIDAD 2D
DESPLIEGUE
-) PRUEBA EN LINEAL A TROZOS.
[CARMONA, FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, TERUEL]
TÉCNICA NO SIRVE PARA DIFERENCIABLES
-) CONSTRUIR SISTEMA PARA QUE TENGA UN
CICLO HETEROCLINO PUNTO-T. [KOKUBU, 93]
LO CONTRARIO DE LO QUE QUEREMOS.
-) BUSCAR BIFURCACIÓN LOCAL QUE LO TENGA.
DE ESTO YA HEMOS HABLADO.

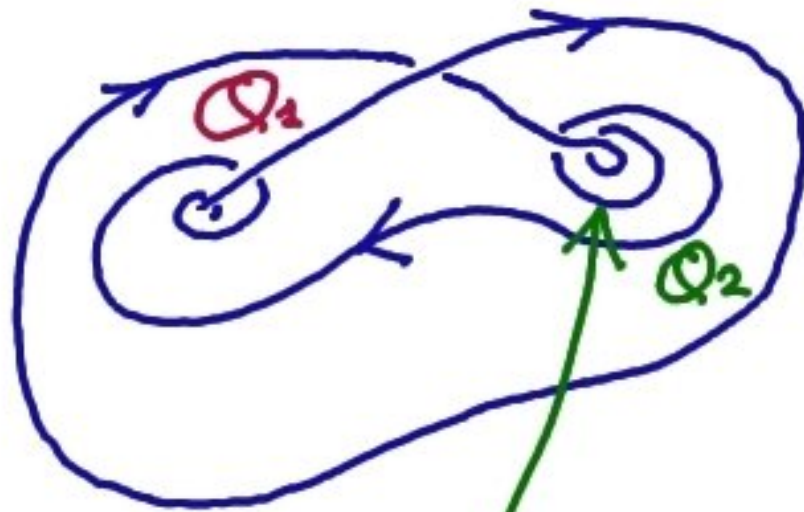
¿CÓMO ANALIZAR LA DINÁMICA CERCA AL CICLO HETEROCLINO PUNTO-T?

-) CONSTRUCCIÓN DE MODELOS BASADOS EN APLICACIONES DE POINCARÉ.
-) REPRODUCCIÓN DEL FLUJO LOCAL O GLOBAL A ORDEN BAJO O ALTO.
-) ANÁLISIS VÁLIDO EN UN ENTORNO TUBULAR DEL CICLO HETEROCLINO.



BIF. GLOBALES ORGANIZADAS POR EL PUNTO-T

HOMOCLINAS DE Q_2

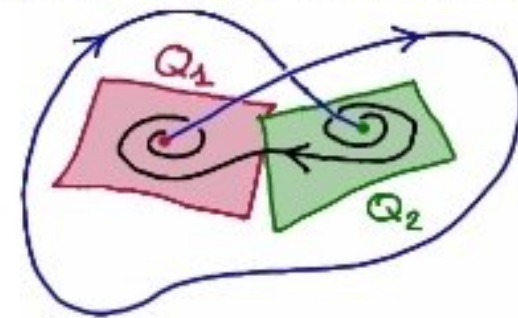


+ VUELTAS

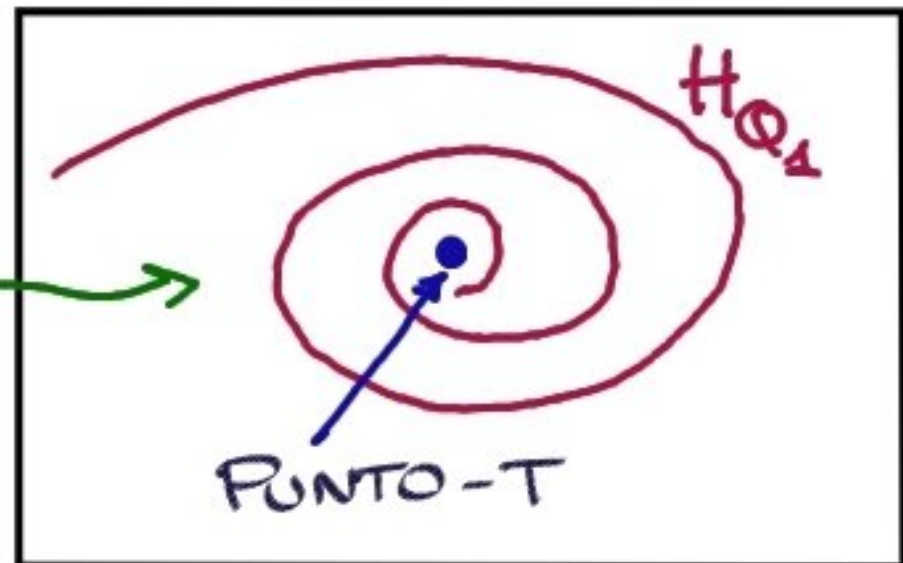


+ CERCA DEL PUNTO-T

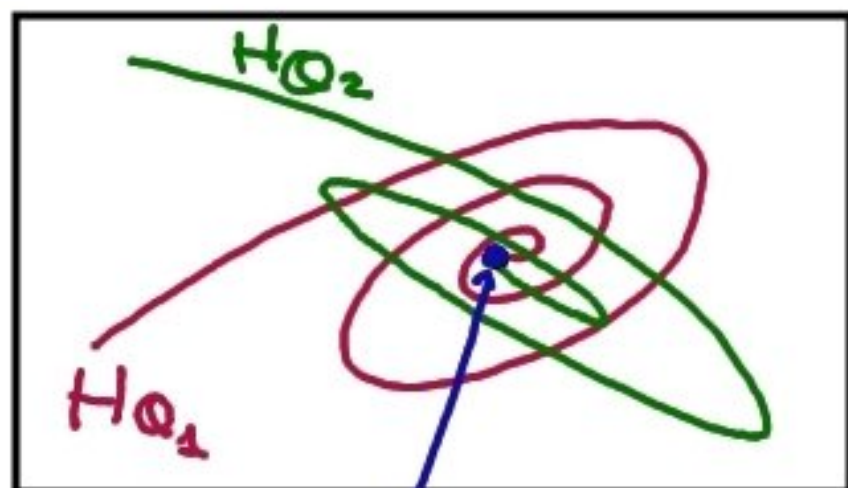
CICLO HETEROCLINO



PLANO DE PARÁMETROS



MÁS INFORMACIÓN SOBRE PUNTOS-T



PUNTO-T

-) "CERCA" DE LAS INTERSECCIONES ENTRE H_{Q_1} Y H_{Q_2} HAY PUNTOS-T SUBSIDIARIOS.
-) HAY BIF. **SILLA-NODO** Y **CÚSPIDE DE ÓRB.** PERIÓDICAS TAN CERCA COMO QUERAMOS DEL PUNTO-T. NO TIENE QUE VER CON QUE LAS HOMOCLINAS SEAN DE TIPO SHIL'NIKOV.

¿ QUÉ QUEDA POR HACER ?

- 1) PROFUNDIZAR EN EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA ORGANIZADA POR EL CICLO HETEROCLINO TIPO PUNTO-T,
- 2) DETERMINAR CÓMO SE PUEDE LLEVAR ESTA DINÁMICA AL TRIPLE - CERO.