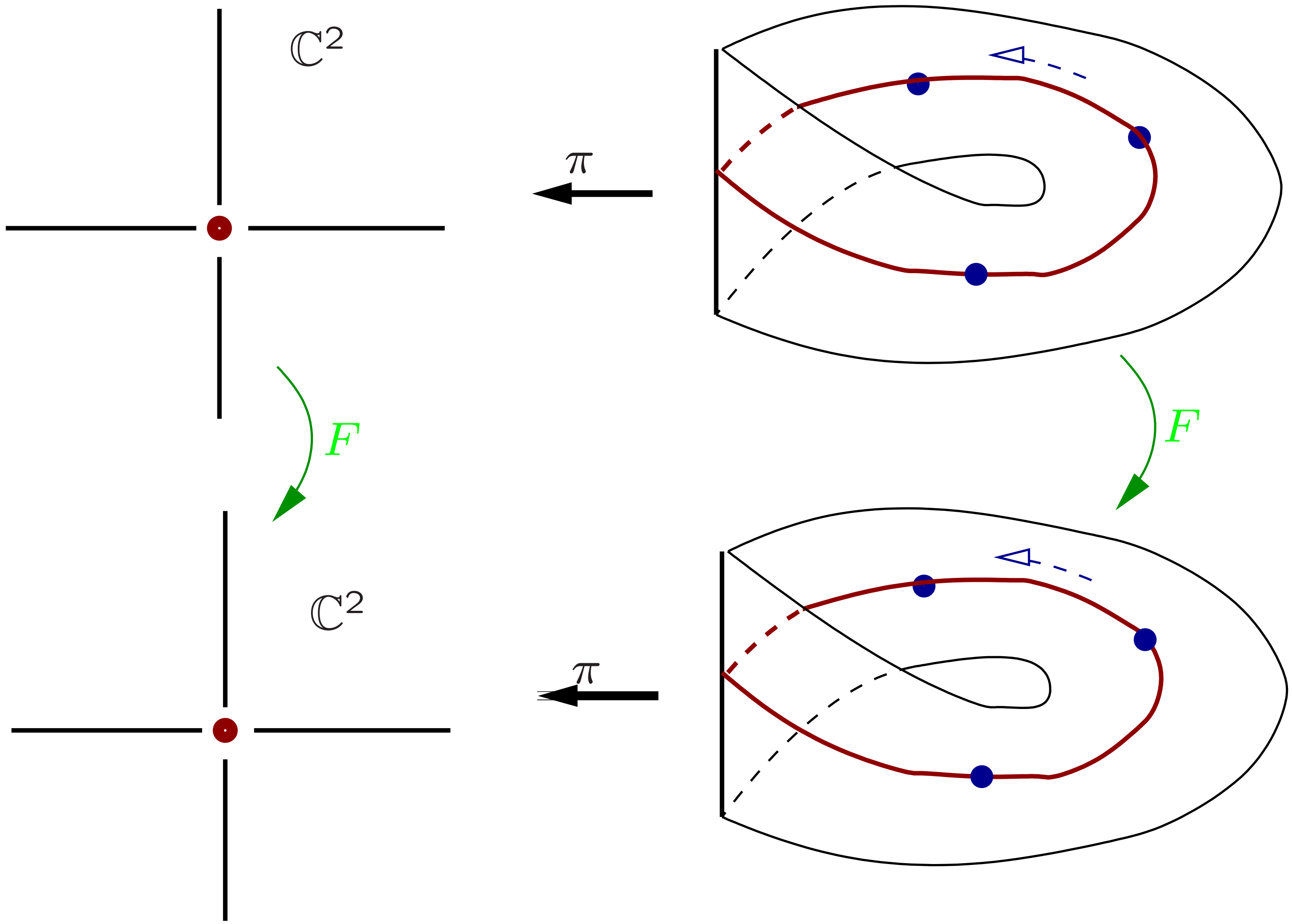
Difeomorfismos holomorfos en dos variables. Naturaleza de las separatrices

F. Cano Torres,

F. Brochero Martínez

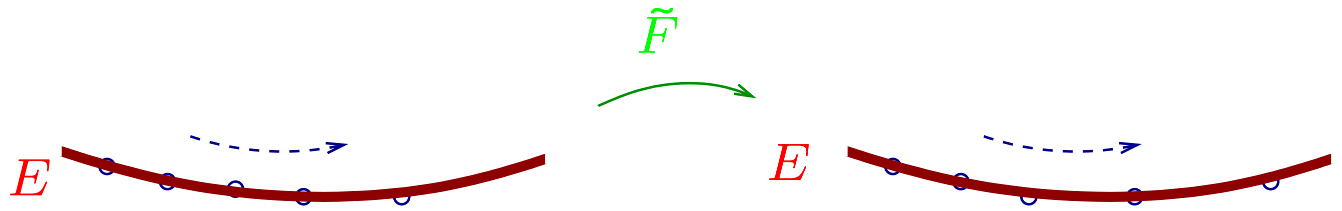
L. López Hernanz

Explosión de un difeomorfismo tangente a la identidad.

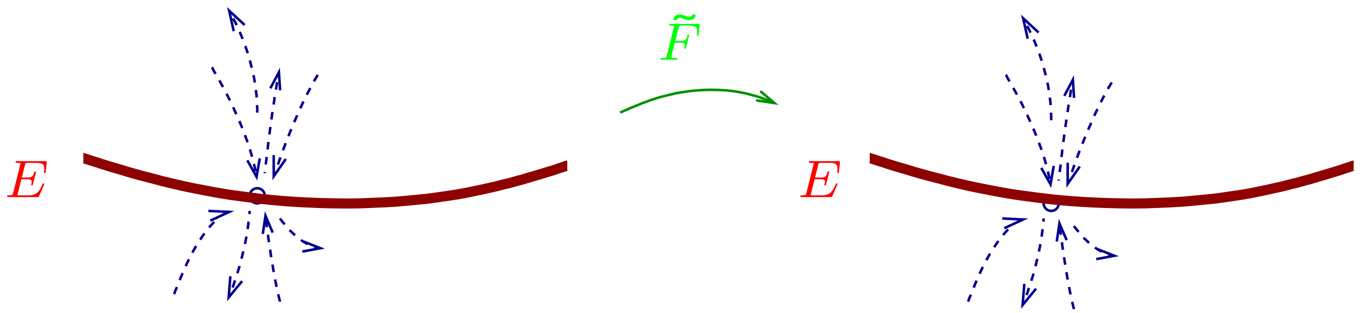


Direcciones características

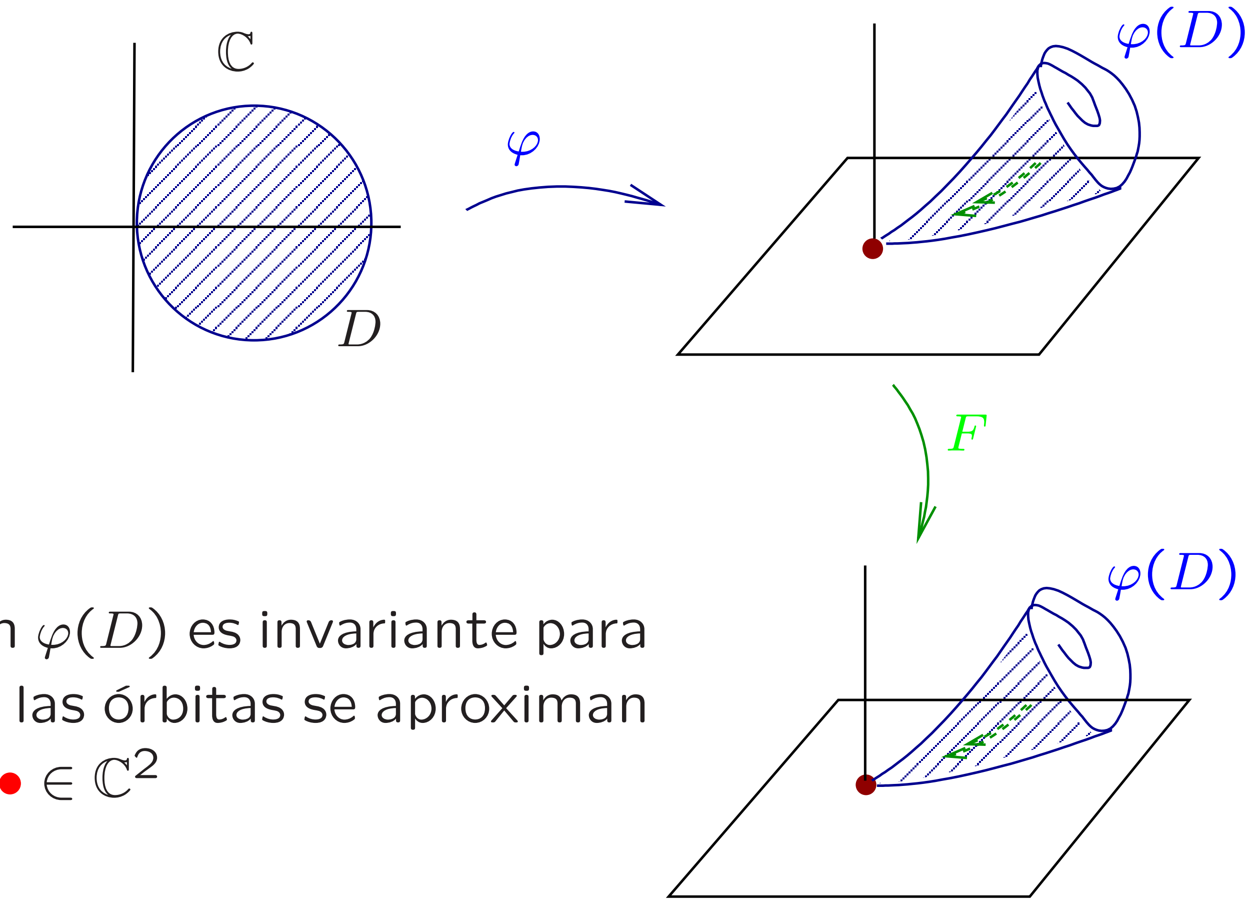
$\tilde{F}$ induce un difeomorfismo en cada punto del divisor excepcional
$E \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



Las órbitas de los puntos exteriores a E se alejan, excepto en los puntos correspondientes las direcciones características.



Curvas parabólicas



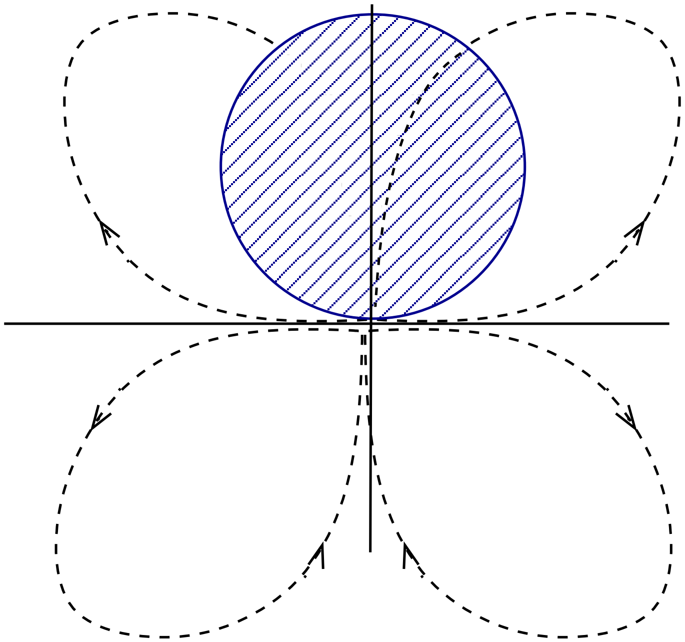
La imagen $\varphi(D)$ es invariante para F y todas las órbitas se aproximan al origen $\bullet \in \mathbb{C}^2$

Ejemplos de curvas parabólicas

Si el eje $y = 0$ es invariante por F, recuperamos una dinámica en dimension uno

$$\begin{array}{rcl} F|_{y=0} : (\mathbb{C}, 0) & \rightarrow & (\mathbb{C}, 0) \\ z & \mapsto & z + az^{k+1} + \cdots \end{array}$$

la descripción "en flor" de Leau permite identificar curvas parabólicas



Problema general: Existencia y naturaleza de las curvas parabólicas

Hakim-Abate: existencia, por métodos directos de dinámica discreta.

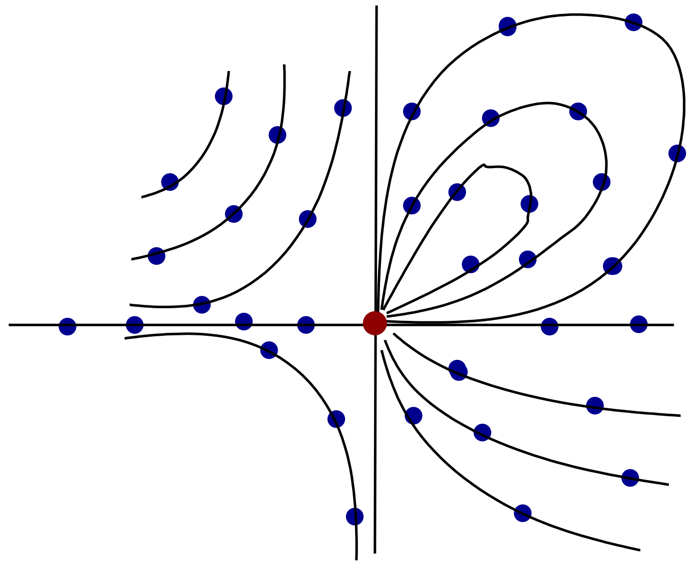
Sauzin,Gelfreich...: naturaleza Borel-sumable o resurgente en algunos casos especiales.

Proponemos utilizar exhaustivamente el método del generador infinitesimal.

El generador infinitesimal

Sistemas dinámicos sumergidos en un flujo

$$F = Exp X$$



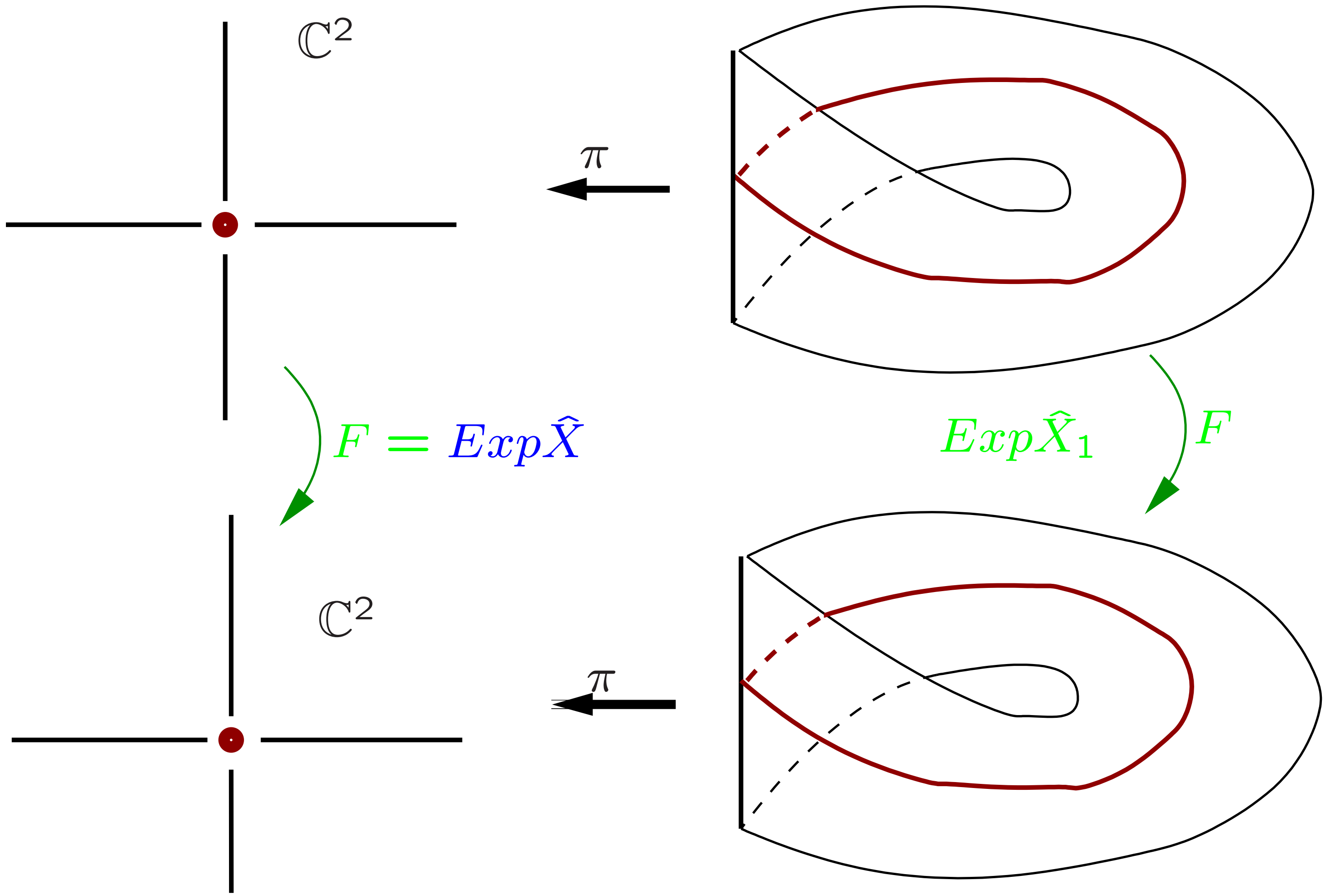
El difeomorfismo es el tiempo 1 de un campo holomorfo X.
Siempre se tiene F sumergido en un "flujo formal"

$$F = Exp \hat{X}$$

IDEA: Estudiar F a través de $\hat{X}$.

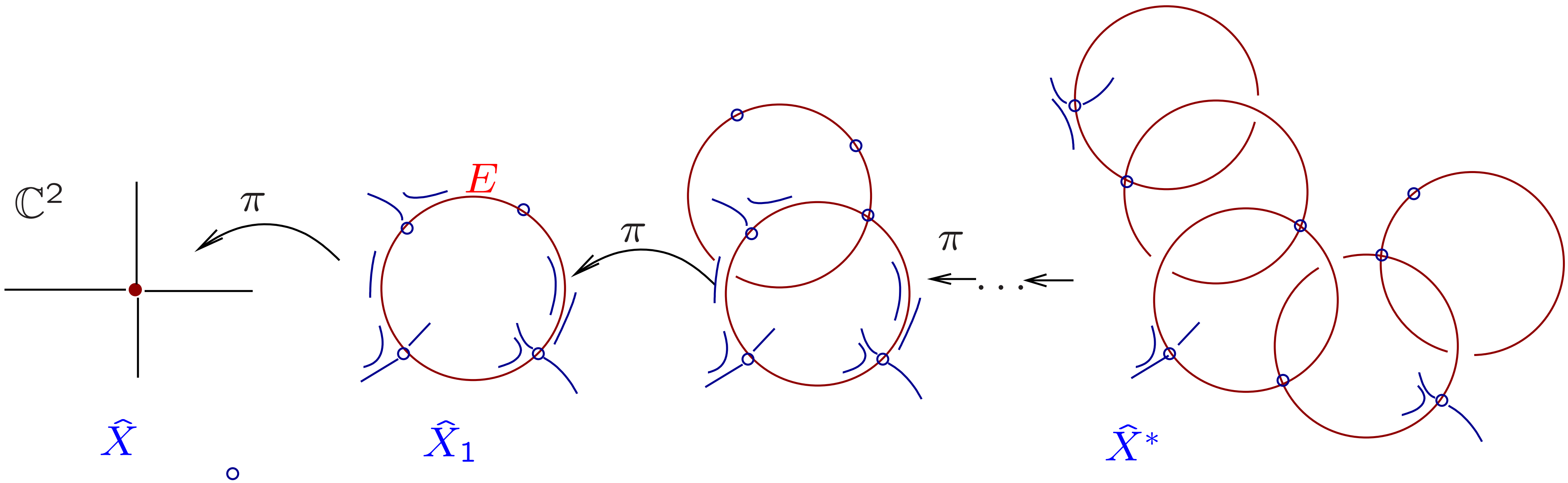
Conmutatividad básica

.



$\hat{X}_1$ es el transformado de $\hat{X}$ por la explosión π.

La reducción de singularidades de Siedenberg



El campo transformado $\hat{X}^*$ se escribe localmente

$$\hat{X}^* = x^a y^b \hat{X}',$$

donde $\hat{X}'$ es o bien no singular o bien tiene una parte lineal no nilpotente.

El equivalente del teorema de Briot y Bouquet (Hakim)

$$\hat{X}^* = x^a y^b \hat{X}',$$

$\hat{X}'$ tiene un valor propio $\neq 0$ en la dirección $y = 0$

$$\Downarrow$$

Existencia de una curva parabólica

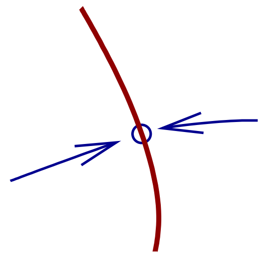
$$y = \varphi(x)$$

para $F = Exp\hat{X}^*$.

Observación: no se sabe, con toda generalidad, si es una curva parabólica "resurgente"

Existencia de curvas parabólicas via la desingularización de $\hat{X}$.

Camacho-Sad $\Rightarrow$ Existe un punto en la desingularización con autovalor no nulo transversal al divisor (dirección "fuerte" transversal)



Hakim $\Rightarrow$ existe una curva parabólica en ese punto.

Ahora es suficiente proyectar vía la desingularización para obtener una curva parabólica en el origen de $\mathbb{C}^2$

Esta proyección, de naturaleza algebraica debe conservar propiedades de sumabilidad, índice Gevrey, resurgencia, etc, de la curva parabólica.