Singularidades en ecuaciones diferenciales Teoría de la resurgencia

Carme Olivé Farré

Universitat Rovira i Virgili

Ddays, 18 de octubre de 2006

Series de potencias

Las matemáticas aplicadas a menudo usan series de potencias:

- Ecuación funcional con un parámetro: $F(u(x), \varepsilon) = 0$.
  Conocemos $u_0(x)$ tal que $F(u_0(x), \varepsilon_0) = 0$ y buscamos

  $$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + u_1(x)(\varepsilon - \varepsilon_0) + u_2(x)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \cdots$$

  - Órbitas periódicas de campos vectoriales
  - variedades estable e inestable de puntos hiperbólicos
  - variedades normalmente hiperbólicas
  - toros invariantes en sistemas hamiltonianos

Series de potencias

Las matemáticas aplicadas a menudo usan series de potencias:

- Ecuación funcional con un parámetro: $F(u(x), \varepsilon) = 0$. Conocemos $u_0(x)$ tal que $F(u_0(x), \varepsilon_0) = 0$ y buscamos

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + u_1(x)(\varepsilon - \varepsilon_0) + u_2(x)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \cdots$$

- Ecuaciones sin parámetros. Buscamos una solución cuando $x \sim x_0$. Uso de la serie de Taylor:

$$u(x) = u(x_0) + u_1(x_0)(x - x_0) + u_2(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

Series de potencias

Las matemáticas aplicadas a menudo usan series de potencias:

- Ecuación funcional con un parámetro: $F(u(x), \varepsilon) = 0$. Conocemos $u_0(x)$ tal que $F(u_0(x), \varepsilon_0) = 0$ y buscamos

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + u_1(x)(\varepsilon - \varepsilon_0) + u_2(x)(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \cdots$$

- Ecuaciones sin parámetros. Buscamos una solución cuando $x \sim x_0$. Uso de la serie de Taylor:

$$u(x) = u(x_0) + u_1(x_0)(x - x_0) + u_2(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

En cualquier caso:
la "solución formal" encontrada, ¿representa una auténtica solución de la ecuación?

Series de potencias

Si la serie es convergente, $u(x)$ será una función analítica en un disco.

Series de potencias

Si la serie es convergente, $u(x)$ será una función analítica en un disco.

Si la serie es divergente,

- ¿tiene ésta alguna relación con una solución de la ecuación de partida?
- ¿hay alguna solución de la ecuación que tenga la serie encontrada como serie de Taylor?

Series de potencias

Si la serie es convergente, $u(x)$ será una función analítica en un disco.

Si la serie es divergente,

- ¿tiene ésta alguna relación con una solución de la ecuación de partida?
- ¿hay alguna solución de la ecuación que tenga la serie encontrada como serie de Taylor? ¿Es posible conocerla o saber sus propiedades básicas?

Series de potencias

Si la serie es convergente, $u(x)$ será una función analítica en un disco.

Si la serie es divergente,

- ¿tiene ésta alguna relación con una solución de la ecuación de partida?
- ¿hay alguna solución de la ecuación que tenga la serie encontrada como serie de Taylor? ¿Es posible conocerla o saber sus propiedades básicas? ¿Es única?

Series de potencias

Definición. Dada una serie de potencias

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{z^{n+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

diremos que es de clase Gevrey-1 si existen dos constantes positivas M y C tales que

$$|a_n| \leq M n! C^n.$$

Series de potencias

Definición. Dada una serie de potencias

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{z^{n+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

diremos que es de clase Gevrey-1 si existen dos constantes positivas M y C tales que

$$|a_n| \leq M n! C^n.$$

Serie convergente de radio $r \Rightarrow \quad |a_n| \leq M(r')^n \quad \forall\, r' > r$.

Series de potencias

Definición. Dada una serie de potencias

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{z^{n+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

diremos que es de clase Gevrey-1 si existen dos constantes positivas M y C tales que

$$|a_n| \leq M n! C^n.$$

Serie convergente de radio $r \Rightarrow \quad |a_n| \leq M(r')^n \quad \forall\, r' > r$.

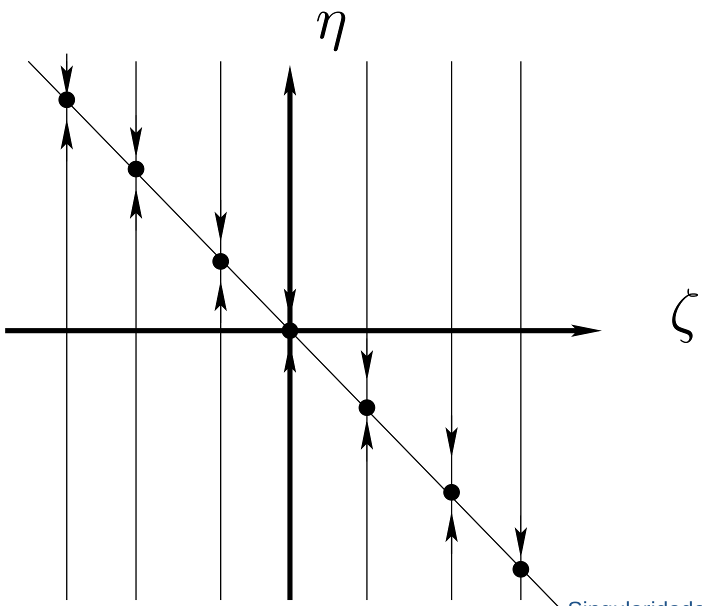
$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{z^{n+1}}$ es Gevrey-1, pero diverge para cualquier valor de z.

Ejemplos

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -x - y + axy^2 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Sistema linealizado:

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \zeta(t) = \zeta_0 \\ \eta(t) = -\zeta_0 + ce^{-t} \end{cases}$$



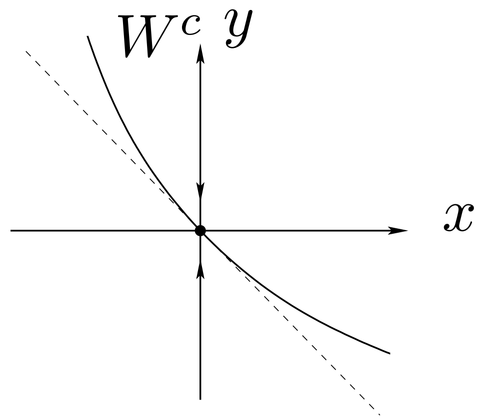
Ejemplos

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -x - y + axy^2 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Sistema completo:

¿Existe una variedad central?

$y = f(x)$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = -1$

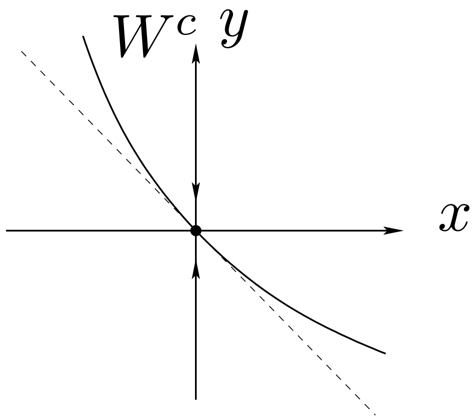


Ejemplos

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -x - y + axy^2 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Sistema completo:

¿Existe una variedad central?



$y = f(x)$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = -1$

Condición: $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}\left(1 - af^2(x)\right)$

- Caso $a = 0$, ecuación de Euler.
- Caso $a \neq 0$, ecuación de Riccati.

Ecuación de Euler

Con el cambio de variables $z = 1/x$, la nueva ecuación es

$$g'(z) = g(z) - \frac{1}{z}$$

y buscamos soluciones que se anulen en $\pm\infty$.

Ecuación de Euler

Con el cambio de variables $z = 1/x$, la nueva ecuación es

$$g'(z) = g(z) - \frac{1}{z}$$

y buscamos soluciones que se anulen en $\pm\infty$.
Solución formal:

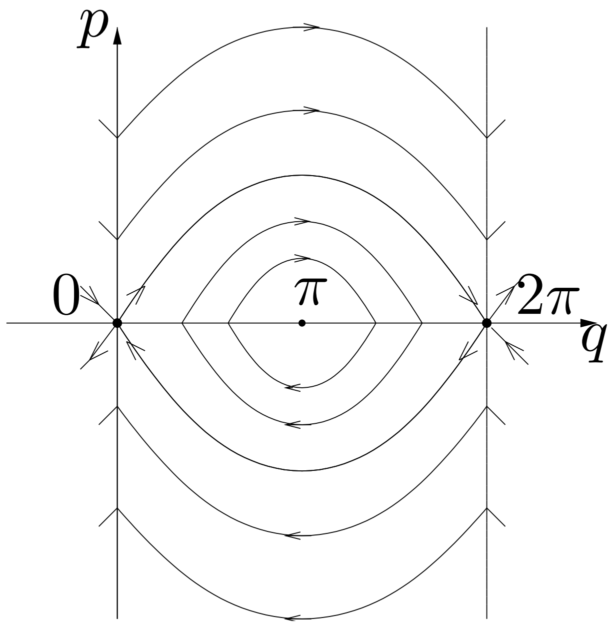
$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}}$$

divergente para cualquier $z \in \mathbb{C}$, pero es Gevrey-1.

Sistema del péndulo forzado

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \sin q \end{cases}$$

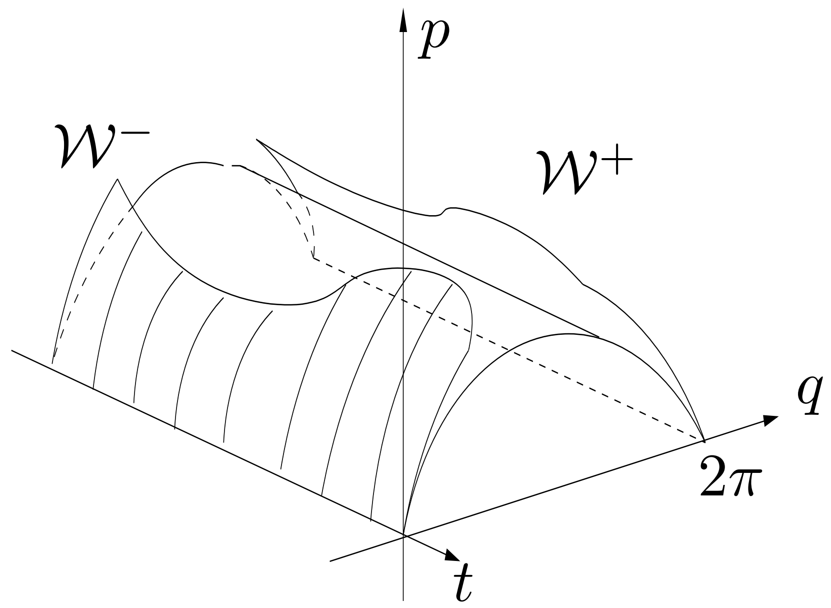
con $q \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.



Sistema del péndulo forzado

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon) \end{cases}$$

con $0 < \varepsilon < 1$ y $\mu > 0$
dos parámetros
y $(q, t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\varepsilon\mathbb{Z}$.



Sistema del péndulo forzado

$$H_{\mu,\varepsilon}(q,p,\tau) = \frac{p^2}{2} + \cos q - 1 + \mu(1-\cos q)\sin\tau.$$

Variedades invariantes estable e inestable: $p = \partial_q \mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon)$.
$\mathsf{T}^{\pm}$ son soluciones de la Ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_\tau \mathsf{T} + \varepsilon H_{\mu,\varepsilon}(q,\partial_q \mathsf{T},\tau) = 0$$

2π-periódicas en τ y con la condición asintótica:

$$\lim_{q\to 0,2\pi} \partial_q \mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0.$$

Sistema del péndulo forzado

$$H_{\mu,\varepsilon}(q,p,\tau) = \frac{p^2}{2} + \cos q - 1 + \mu(1-\cos q)\sin\tau.$$

Variedades invariantes estable e inestable: $p = \partial_q \mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon)$.
$\mathsf{T}^{\pm}$ son soluciones de la Ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_\tau \mathsf{T} + \varepsilon H_{\mu,\varepsilon}(q, \partial_q \mathsf{T}, \tau) = 0$$

2π-periódicas en τ y con la condición asintótica:

$$\lim_{q\to 0,2\pi} \partial_q \mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0.$$

$\mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon) \longrightarrow \mathsf{T}_0(q) + \sum_{n\geq 1} \mathsf{T}_n(q,\tau;\mu)\varepsilon^n$ no convergente en ε.

T_n singularidades polares en $\{i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\}$.

Resumación de Borel-Laplace

Transformada de Borel formal, $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{z^{n+1}} \mapsto \hat{g}(\zeta) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\zeta^n}{n!}$$

Resumación de Borel-Laplace

Transformada de Borel formal, $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^{n+1}} \mapsto \hat{g}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\zeta^n}{n!}$$

Series Gevrey-1, $\tilde{g}(z)$

$\tilde{\mathcal{B}}$

$\hat{g}$, Gérmenes analíticos en el origen con prolongación analítica en un sector y con crecimiento exponencial

$\mathcal{L}^\theta$

Gérmenes Sectoriales, g_θ

$$g_\theta(z) = \int_0^{\infty(\theta)} e^{-z\zeta} \hat{g}(\zeta)\, d\zeta$$

Resumación de Borel-Laplace

En general,

- ¿siempre existe la transformada de Laplace de $\hat{g}$?

Resumación de Borel-Laplace

En general,

- ¿siempre existe la transformada de Laplace de $\hat{g}$?

  Respuesta: depende.

Resumación de Borel-Laplace

En general,

- ¿siempre existe la transformada de Laplace de $\hat{g}$?

  Respuesta: depende.

- Caso de existir, ¿es única?

Resumación de Borel-Laplace

En general,

- ¿siempre existe la transformada de Laplace de $\hat{g}$?

  Respuesta: depende.

- Caso de existir, ¿es única?

  Respuesta: depende.

Ecuación de Euler

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}} \qquad \longrightarrow \qquad \hat{g}(\zeta) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \zeta^n = -\frac{1}{1+\zeta}$$

- analítica en $|\zeta| < 1$.

Ecuación de Euler

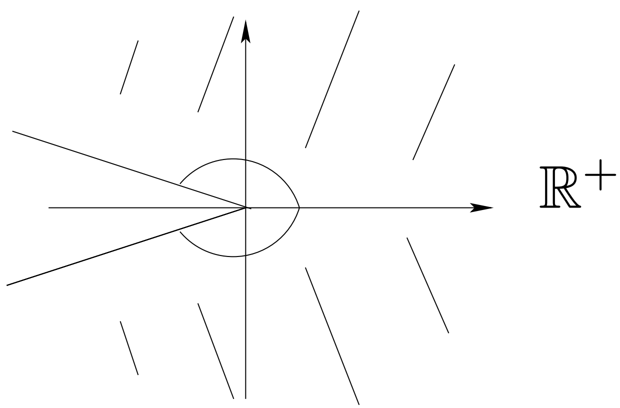
$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}} \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\zeta) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \zeta^n = -\frac{1}{1+\zeta}$$

- analítica en $|\zeta| < 1$.
- con continuación analítica en $\mathbb{C} - \{-1\}$.

Ecuación de Euler

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}} \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\zeta) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \zeta^n = -\frac{1}{1+\zeta}$$

- analítica en $|\zeta| < 1$.
- con continuación analítica en $\mathbb{C} - \{-1\}$.
- $|\hat{g}(\zeta)| \leq C = C\, e^{0|\zeta|}$, tiene crecimiento exponencial 0 en un sector de $\mathbb{R}^+$.

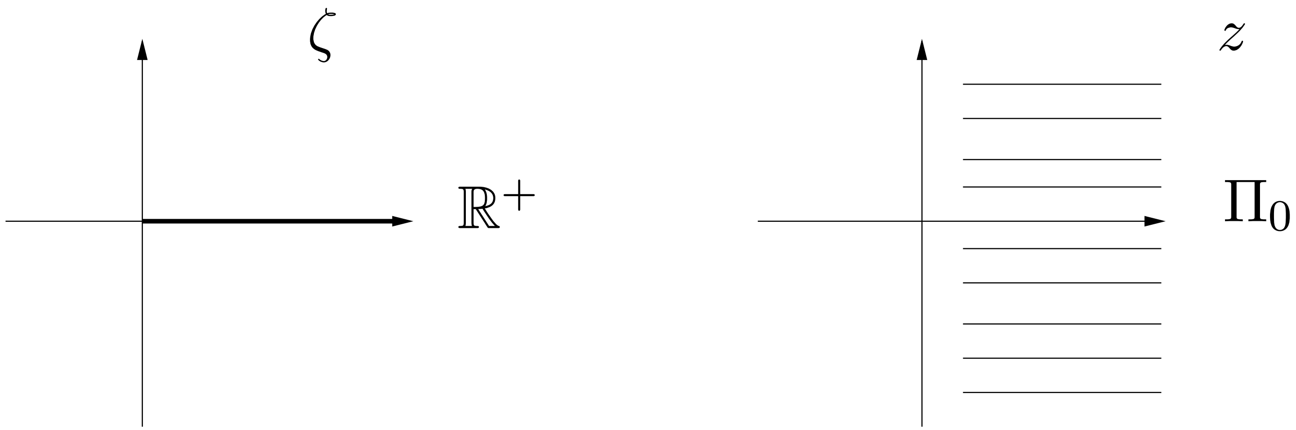


Ecuación de Euler

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}} \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\zeta) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\zeta^n = -\frac{1}{1+\zeta}$$

Transformada de Laplace en la dirección $\mathbb{R}^+$:

$$g(z) = -\int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$



Ecuación de Euler

Propiedades de

$$g(z) = -\int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$

- analítica en Π_0.

Ecuación de Euler

Propiedades de

$$g(z) = -\int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$

- analítica en Π_0.
- $g \sim_1 \tilde{g}$ en Π_0:
  $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, M, C > 0$ tales que

$$\left| g(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{MC^N N!}{z^{N+1}}.$$

Ecuación de Euler

Propiedades de

$$g(z) = -\int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$

- analítica en Π_0.
- $g \sim_1 \tilde{g}$ en Π_0:
  $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, M, C > 0$ tales que

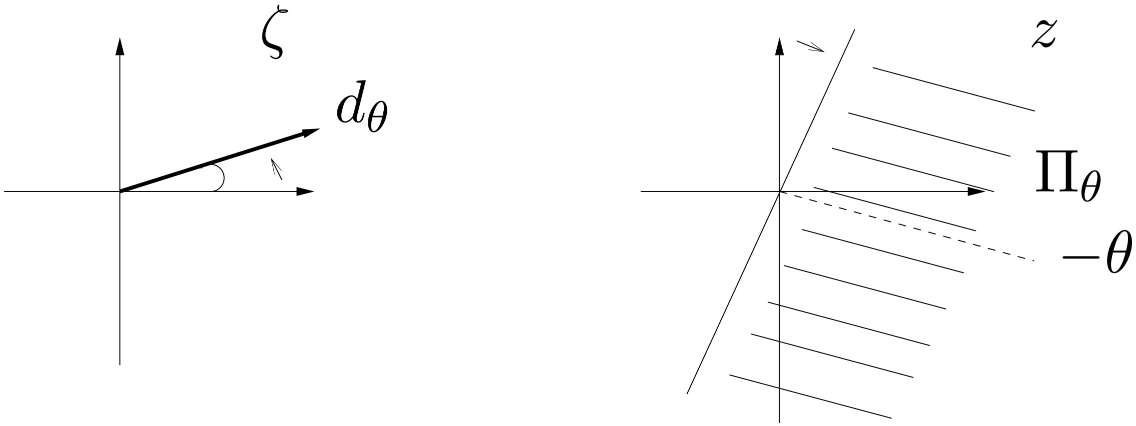
$$\left| g(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{MC^N N!}{z^{N+1}}.$$

- solución de la ecuación de Euler con $\lim_{z \to +\infty} g(z) = 0$.

Ecuación de Euler

Otras resumaciones de Borel-Laplace:

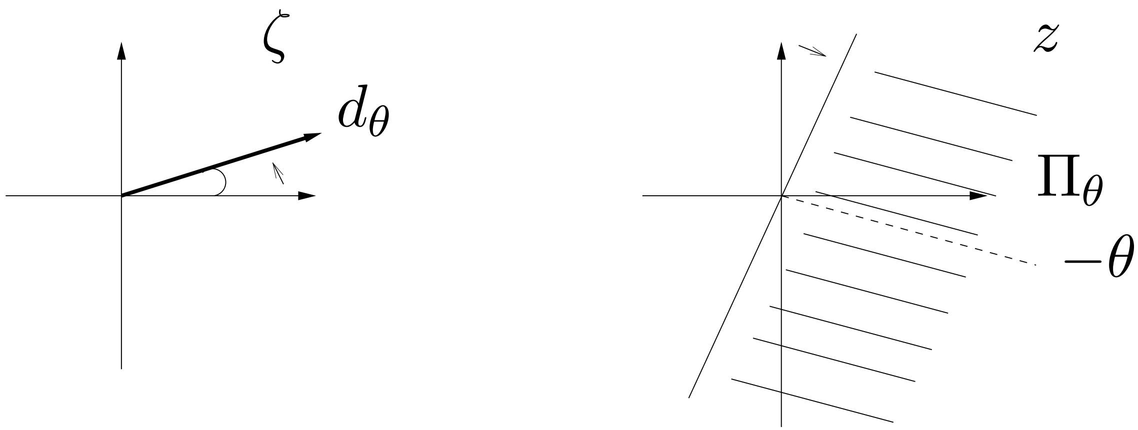
$$g_\theta(z) = -\int_0^{\infty(\theta)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$



Ecuación de Euler

Otras resumaciones de Borel-Laplace:

$$g_\theta(z) = -\int_0^{\infty(\theta)} e^{-z\zeta}\,\frac{1}{1+\zeta}\,d\zeta$$

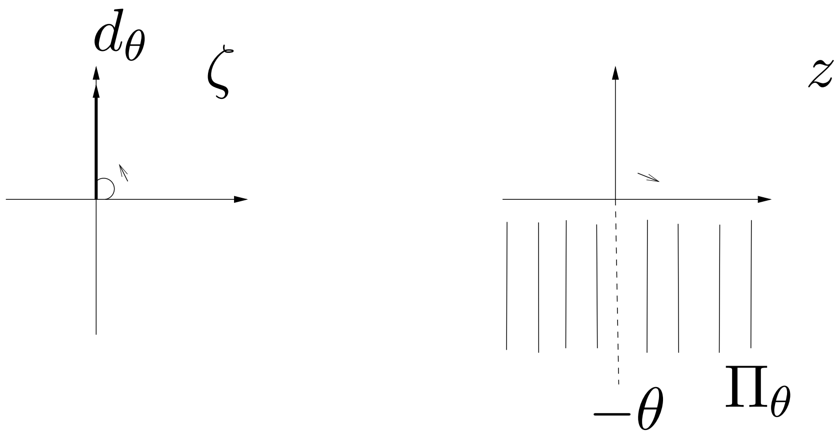


Importante:

$g_\theta(z) = g_0(z)$ cuando $z \in \Pi_0 \cap \Pi_\theta$ porque no hay singularidades
$\Rightarrow \quad g_\theta(z)$ es una continuación analítica de $g_0(z)$ en Π_θ

Ecuación de Euler

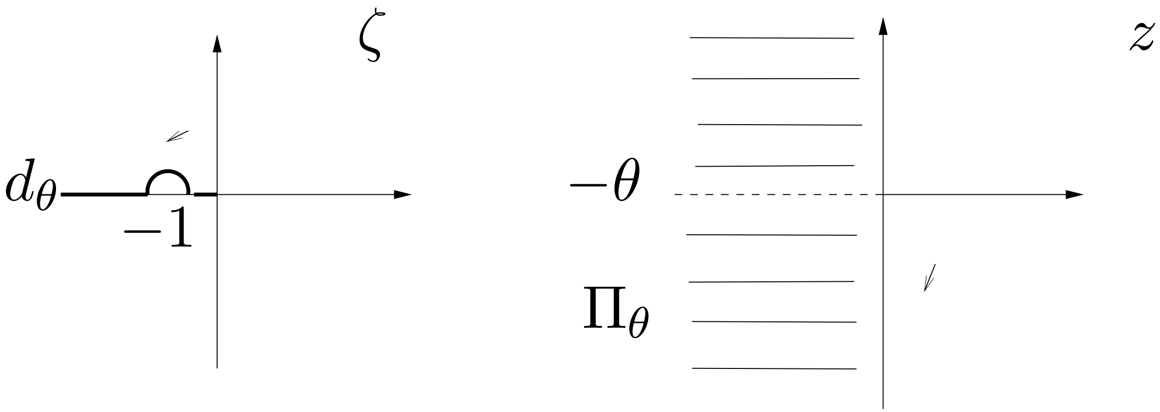
$$g_{\pi/2}(z) = -\int_0^{\infty(\pi/2)} e^{-z\zeta}\,\frac{1}{1+\zeta}\,d\zeta$$



Ecuación de Euler

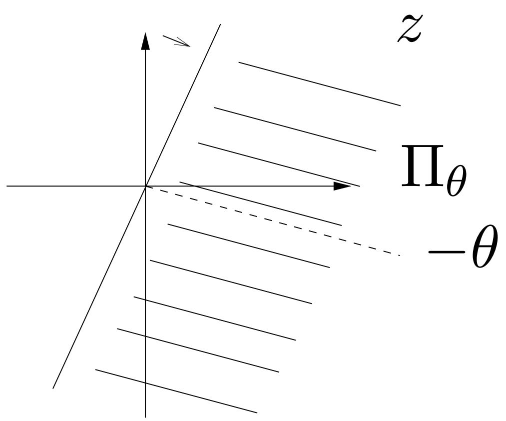
$\theta = \pi$ es imposible porque $\hat{g}$ tiene una singularidad en $\zeta = -1$

$$g_{\pi^-}(z) = -\int_0^{\infty(\pi^-)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$



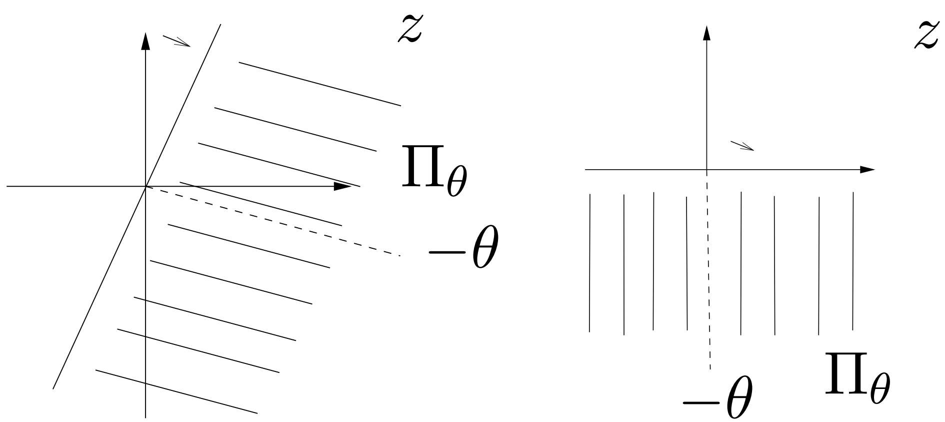
Ecuación de Euler

$g(z)$, que estaba definida en $\Re e\, z > 0$
Hemos construido una continuación analítica de $g(z)$ en:



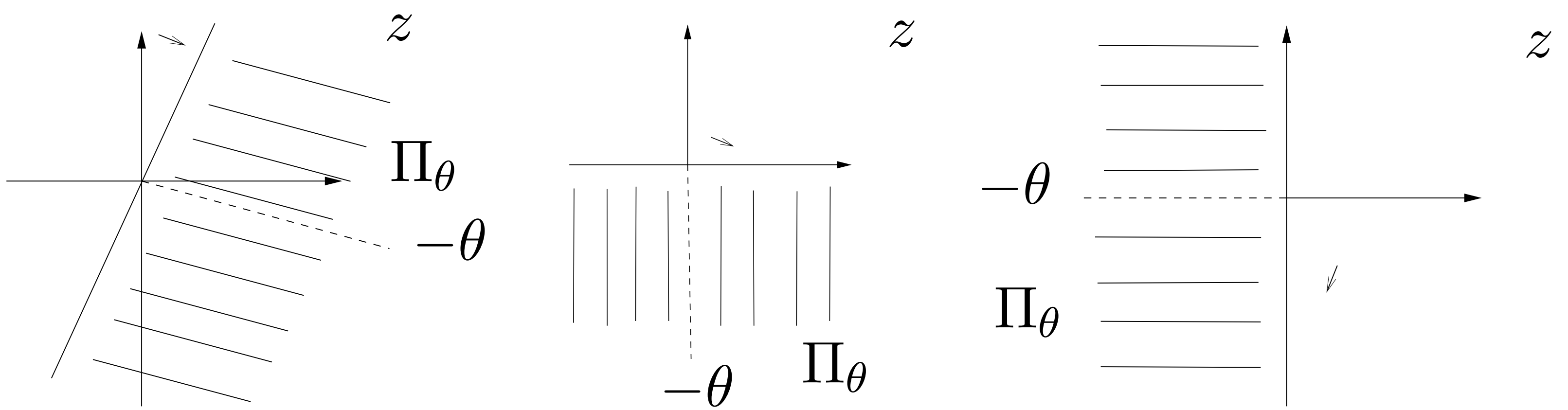
Ecuación de Euler

$g(z)$, que estaba definida en $\Re e\, z > 0$
Hemos construido una continuación analítica de $g(z)$ en:



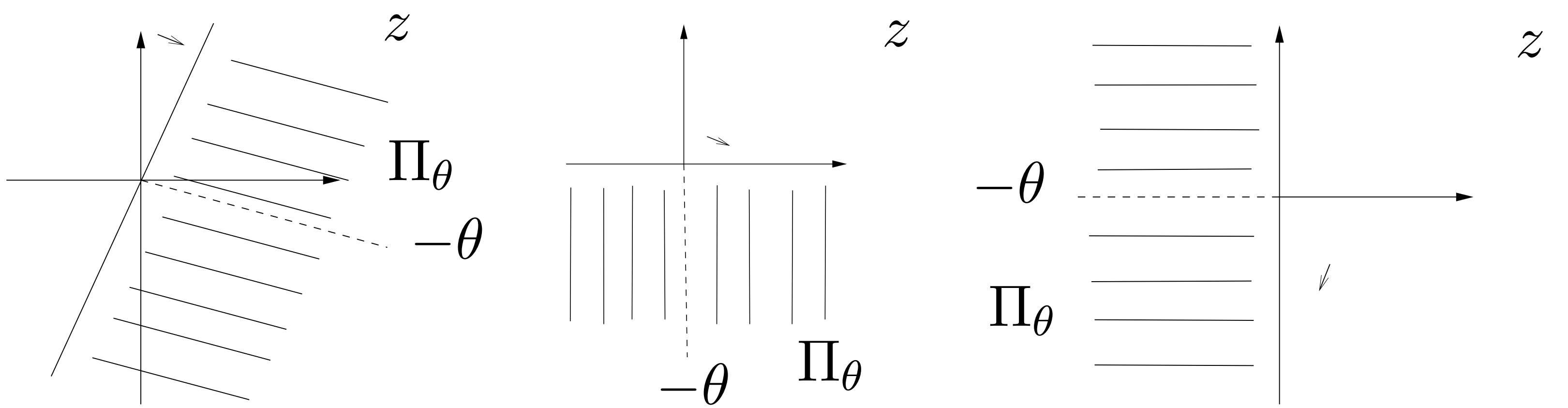
Ecuación de Euler

$g(z)$, que estaba definida en $\Re e\, z > 0$
Hemos construido una continuación analítica de $g(z)$ en:

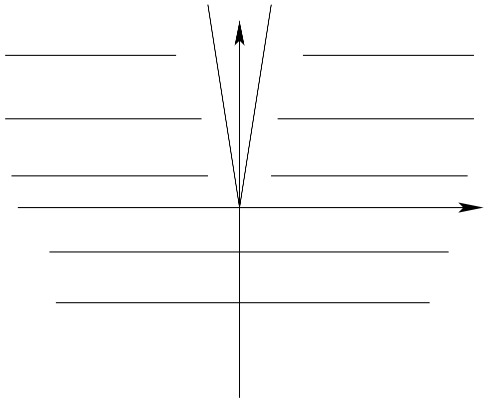


Ecuación de Euler

$g(z)$, que estaba definida en $\Re e\, z > 0$
Hemos construido una continuación analítica de $g(z)$ en:



En cualquier sector del plano cortado



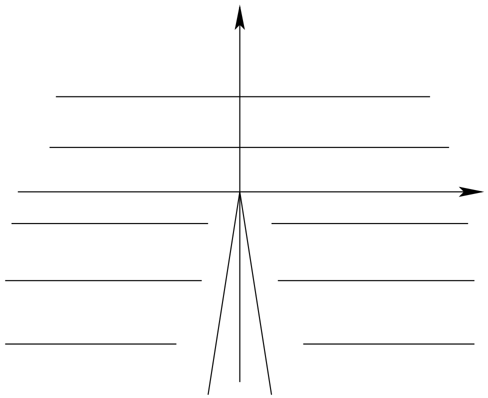
g_{π^-} solución de la ecuación

$$g_{\pi^-}(z) \sim_1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}}$$

En particular, $\lim\limits_{\Im m\, z \longrightarrow -\infty} g_{\pi^-}(z) = 0.$

Ecuación de Euler

$g(z)$, que estaba definida en $\Re e\, z > 0$
Construimos una continuación analítica de $g(z)$ en el sentido contrario y en cualquier sector del plano cortado



g_{π^+} solución de la ecuación

$$g_{\pi^+}(z) \sim_1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}}$$

En particular, $\lim_{\Im m\, z \to +\infty} g_{\pi^+}(z) = 0$.

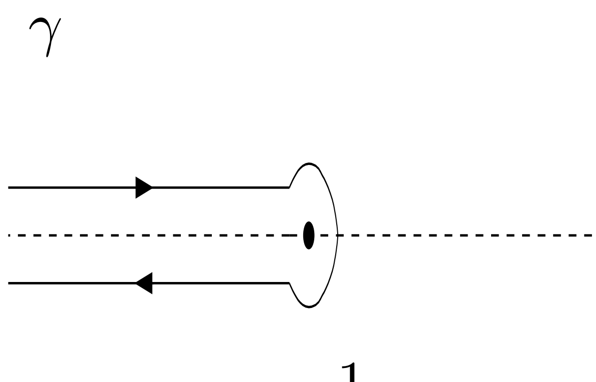
Ecuación de Euler

Tenemos dos continuaciones analíticas de la función g inicial,

$$g_{\pi^-} \qquad \text{y} \qquad g_{\pi^+}$$

que son soluciones de la ecuación de Euler y son asintóticas a la misma serie.
Coinciden en $\Re e\, z > 0$, pero no en $\Re e\, z < 0$:

$$\begin{aligned} g_{\pi^+}(z) &= g_{\pi^-}(z) + \int_\gamma e^{-z\zeta}\hat{g}(\zeta)\,d\zeta = \\ &= g_{\pi^-}(z) + 2\pi i Res\left(e^{-z\zeta}\hat{g}(\zeta), \zeta = -1\right) = g_{\pi^-}(z) - 2\pi i e^z \end{aligned}$$



Ecuación de Euler

Tenemos dos continuaciones analíticas de la función g inicial,

$$g_{\pi^-} \qquad \text{y} \qquad g_{\pi^+}$$

que son soluciones de la ecuación de Euler y son asintóticas a la misma serie.
Coinciden en $\Re e\, z > 0$, pero no en $\Re e\, z < 0$:

$$\begin{aligned} g_{\pi^+}(z) &= g_{\pi^-}(z) + \int_\gamma e^{-z\zeta}\hat{g}(\zeta)\, d\zeta = \\ &= g_{\pi^-}(z) + 2\pi i Res\left(e^{-z\zeta}\hat{g}(\zeta), \zeta = -1\right) = g_{\pi^-}(z) - 2\pi i e^{z} \end{aligned}$$

Singularidades ramificadas de la "funciones resumadas" $\leftrightarrows$ singularidades de $\hat{g}$ en el plano de Borel.

Ecuación de Riccati

$$g'(z) = g(z) + B^{-}\frac{1}{z} + B^{+}\frac{1}{z}g^2(z)$$

- no se puede obtener explícitamente $\tilde{g}$ y no sabemos si es Gevrey-1.
- no tenemos información de la continuación analítica de $\hat{g}$.

Ecuación de Riccati

$$g'(z) = g(z) + B^{-}\frac{1}{z} + B^{+}\frac{1}{z}g^2(z)$$

- no se puede obtener explícitamente $\tilde{g}$ y no sabemos si es Gevrey-1.
- no tenemos información de la continuación analítica de $\hat{g}$.

Alternativa: trabajar con la transformada de Borel de la ecuación

$$-(\zeta + 1)\hat{g} = B^{-} + B^{+}(1 * \hat{g} * \hat{g})$$

donde $f * g(\zeta) = \int_0^{\zeta} f(t)g(\zeta - t)\, dt$.

Ecuación de Riccati

Propiedades de $\hat{g}$:

- es una función con singularidades polares simples y logarítmicas en $\zeta \in \mathbb{Z}^*$.

Ecuación de Riccati

Propiedades de $\hat{g}$:

- es una función con singularidades polares simples y logarítmicas en $\zeta \in \mathbb{Z}^*$.
- es convergente en el origen

Ecuación de Riccati

Propiedades de $\hat{g}$:

- es una función con singularidades polares simples y logarítmicas en $\zeta \in \mathbb{Z}^*$.
- es convergente en el origen
- tiene continuación analítica a lo largo de cualquier recta que evite las singularidades
- tiene crecimiento exponencial

Ecuación de Riccati

Propiedades de $\hat{g}$:

- es una función con singularidades polares simples y logarítmicas en $\zeta \in \mathbb{Z}^*$.
- es convergente en el origen
- tiene continuación analítica a lo largo de cualquier recta que evite las singularidades
- tiene crecimiento exponencial

$\tilde{g}$ es una FUNCIÓN RESURGENTE SIMPLE.

Ecuación de Riccati

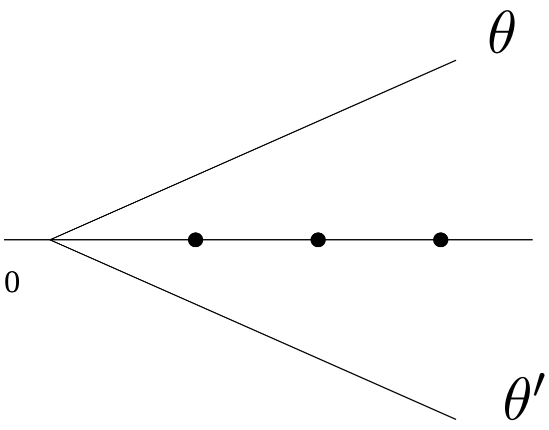
Propiedades de $\hat{g}$:

- es una función con singularidades polares simples y logarítmicas en $\zeta \in \mathbb{Z}^*$.
- es convergente en el origen
- tiene continuación analítica a lo largo de cualquier recta que evite las singularidades
- tiene crecimiento exponencial

$\tilde{g}$ es una FUNCIÓN RESURGENTE SIMPLE.

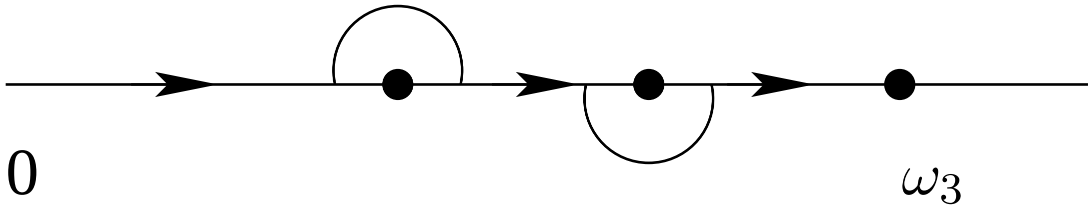
Las FUNCIONES RESURGENTES y el CÁLCULO DIFERENCIAL permiten estudiar las diferentes resumaciones de una serie Gevrey-1

Ecuación de Riccati



$$g_\theta(z) = g_{\theta'}(z) + \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r!} e^{-(\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_r})z} \left(\Delta_{\omega_{i_1}} \cdots \Delta_{\omega_{i_r}} \tilde{g}\right)_{\theta'}$$

Ecuación de Riccati



Determinación $\hat{g}^{-+}_{\omega_1\omega_2}$ de la forma:

$$\frac{c^{-+}_{\omega_1\omega_2}}{2\pi i\zeta} + \hat{\psi}^{-+}_{\omega_1\omega_2}(\zeta)\frac{log\zeta}{2\pi i} + regular$$

Entonces, la derivada extranjera de $\tilde{g}$ es:

$$\Delta_{\omega_3}\tilde{g} = promedio\left(c^{\epsilon_1\epsilon_2}_{\omega_1\omega_2} + \mathcal{B}^{-1}\hat{\psi}^{\epsilon_1\epsilon_2}_{\omega_1\omega_2}\right)$$

donde $\epsilon_i = +$ o $-$.

Ecuación de Riccati

Cálculo de $\Delta_{\omega_1} \cdots \Delta_{\omega_r} \tilde{g}$:

- INTEGRAL FORMAL. $\tilde{G}(z,u) = \sum_{n \geq 0} u^n e^{nz} \tilde{g}_n(z)$
- ECUACIÓN DEL PUENTE. $\Delta_\omega \tilde{G} = A_\omega(u) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial u}$

Referencias:

W. Balser.
"From Divergent Power Series to Analytic Functions".
Lecture Notes in Mathematics, 1592. Springer-Verlag (1994).

C. Bonet, D. Sauzin, T.M. Seara and M. València.
"Adiabatic invariant of the harmonic oscillator, complex matching and resurgence methods".
SIAM J. Math. Anal. (1998), 29 (6), 1335-1360.

B. Candelpergher, J.C. Nosmas, F. Pham,
" Approche de la résurgence",
Actualités Math. Hermann, París, 1993.

V.G. Gelfreich and D. Sauzin.
"Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map".
Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (2001), 51(2), 1001-1055.

B. Malgrange.
" Sommation des s\'eries divergentes".
Exp. Math. (1995), 13, 163--222.

C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara.
" Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation".
Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (2003), 53(4), 1185-1235.

C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara
"Two Examples of Resurgence".
Contemporary Mathematics. (2005), 373, 355-371.

D. Sauzin.
"Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé".
Ann.Ins.Fourier, Grenoble. (1995), 45(2), 453-511.