Estudio cualitativo del equilibrio mediante explosiones

Clementa Alonso-González

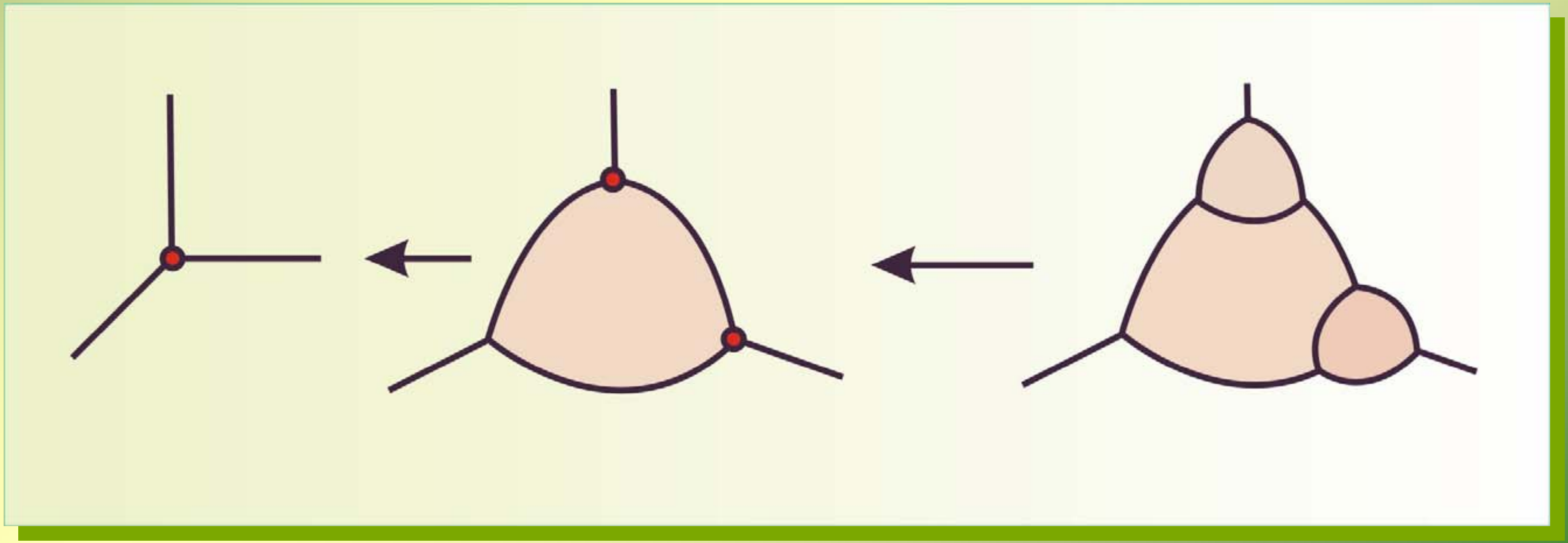
Universidad de Alicante

Ddays 2006

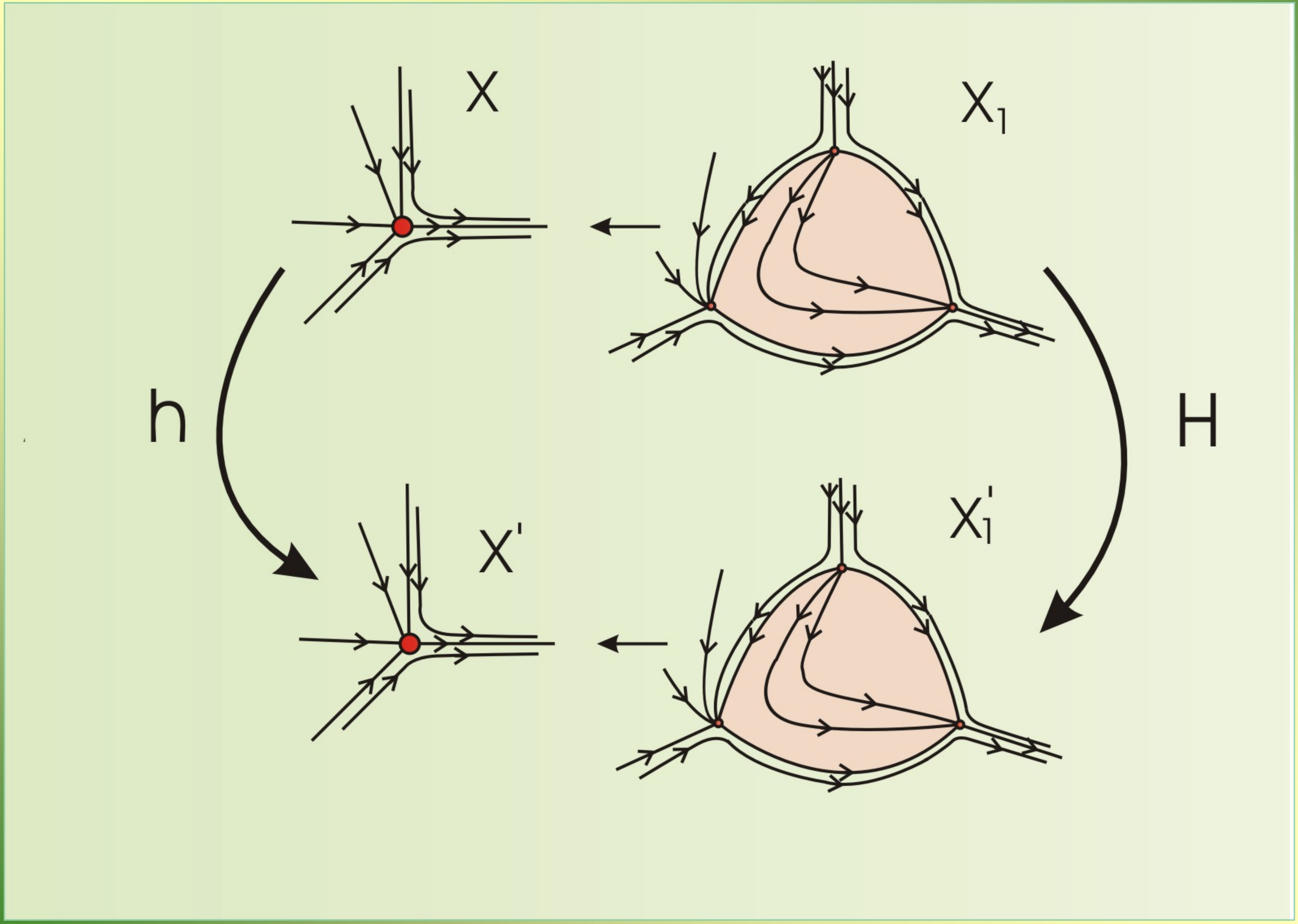
Explosiones de punto

$S^2 \times R \longrightarrow R^3$

$(x, t) \longrightarrow tx$



Explosión de la dinámica

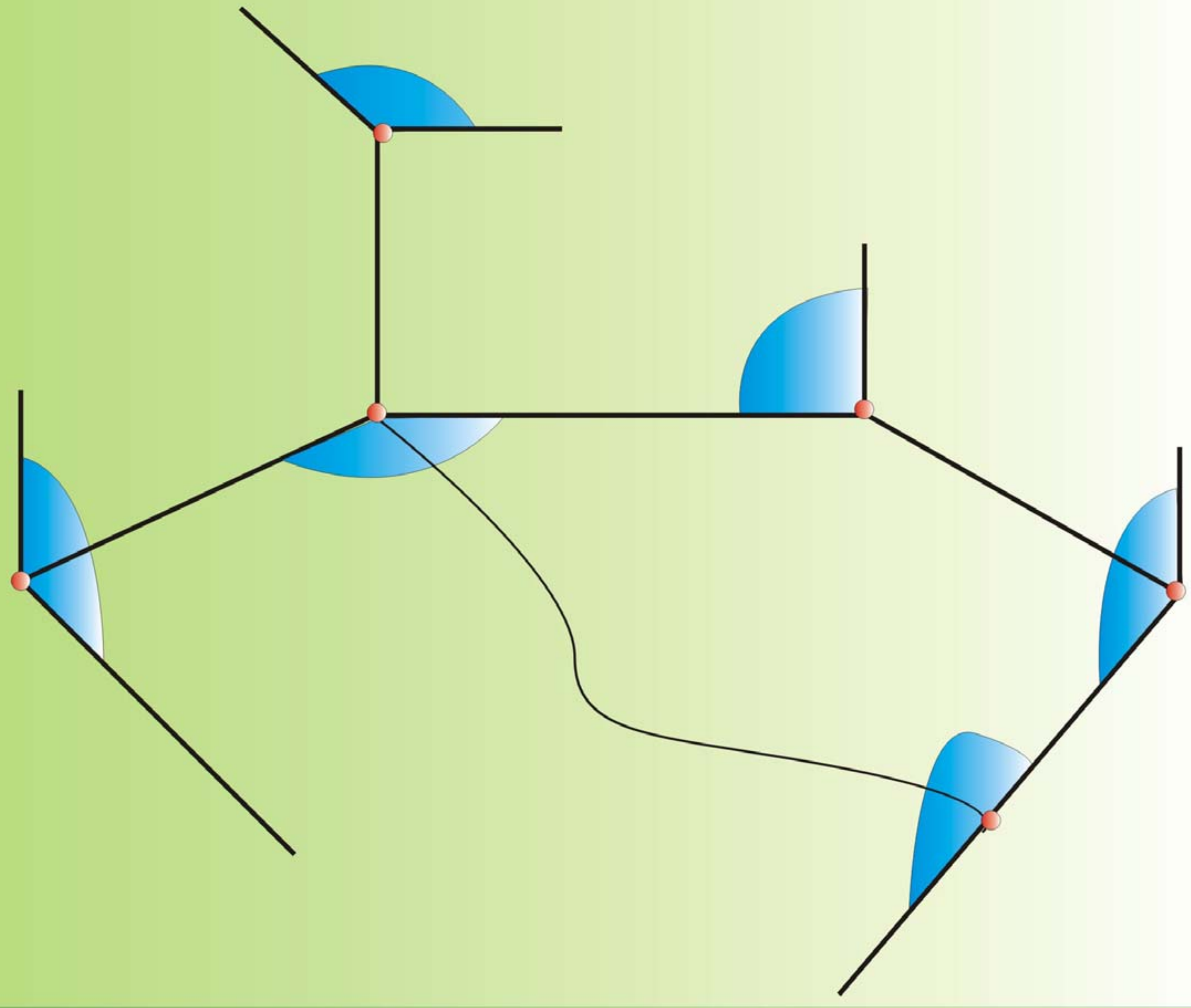


<u>Teorema (Hartman-Grobman)</u> → Dos singularidades hiperbólicas con la misma signatura son topológicamente equivalentes

Equilibrio π-hiperbólico

Un campo X tiene un equilibrio *<u>π-hiperbólico</u>* en el origen si después de un número finito de explosiones (resolución de singularidades = π), podemos obtener una dinámica con las siguientes propiedades:

- Todas las singularidades son hiperbólicas
- No hay conexiones de sillas no contenidas en intersecciones de componentes del divisor
- No hay retorno (ciclos)

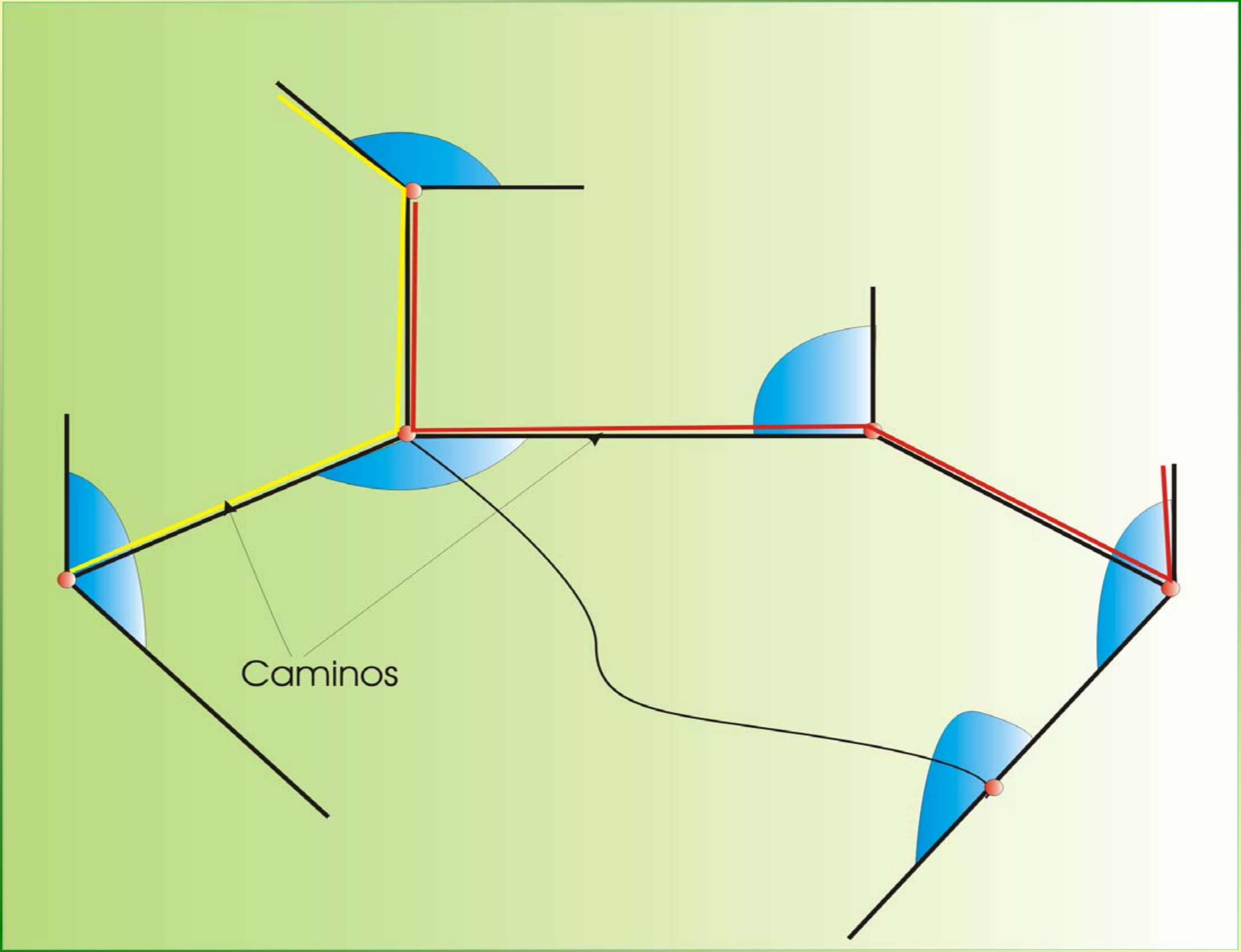


Teorema *(Alonso-González,C; Camacho,I*; Cano, F, (2006))

Si X y X' tienen un equilibrio π-hiperbólico en el origen, el *mismo lugar crítico* *y los* *mismos caminos*, existe una equivalencia topológica entre los transformados en el espacio total de la resolución de singularidades.

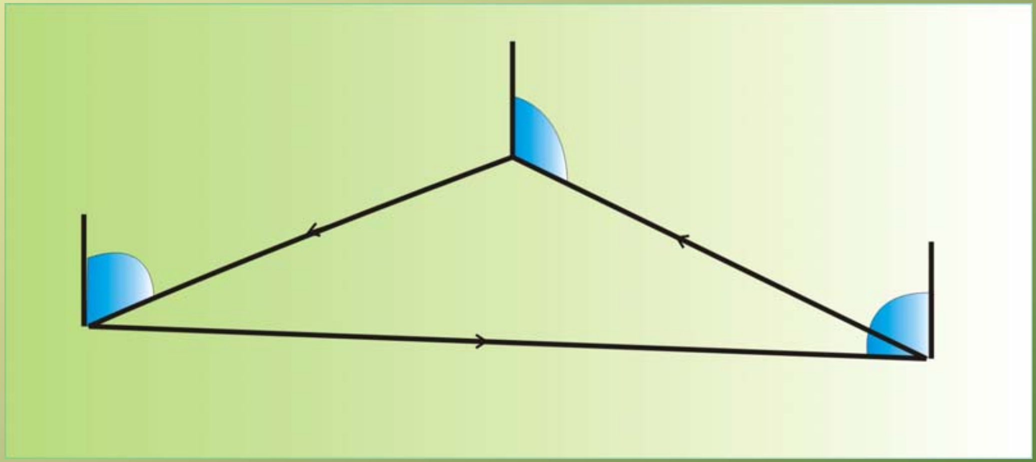
- **Lugar crítico**: puntos singulares + posiciones relativas
- **Caminos**: Estructuras geométricas sobre las intersecciones de componentes del divisor que dependen únicamente de la distribución de los autovalores.

Invariantes determinados por un *jet* finito $\longrightarrow$ Determinación finita


Caminos

Problemas de determinación finita
(Oviedo-Valladolid)

Presencia de ciclos después de la resolución de singularidades



Problemas de determinación finita

(Oviedo-Valladolid)

Presencia de singularidades semi-hiperbólicas

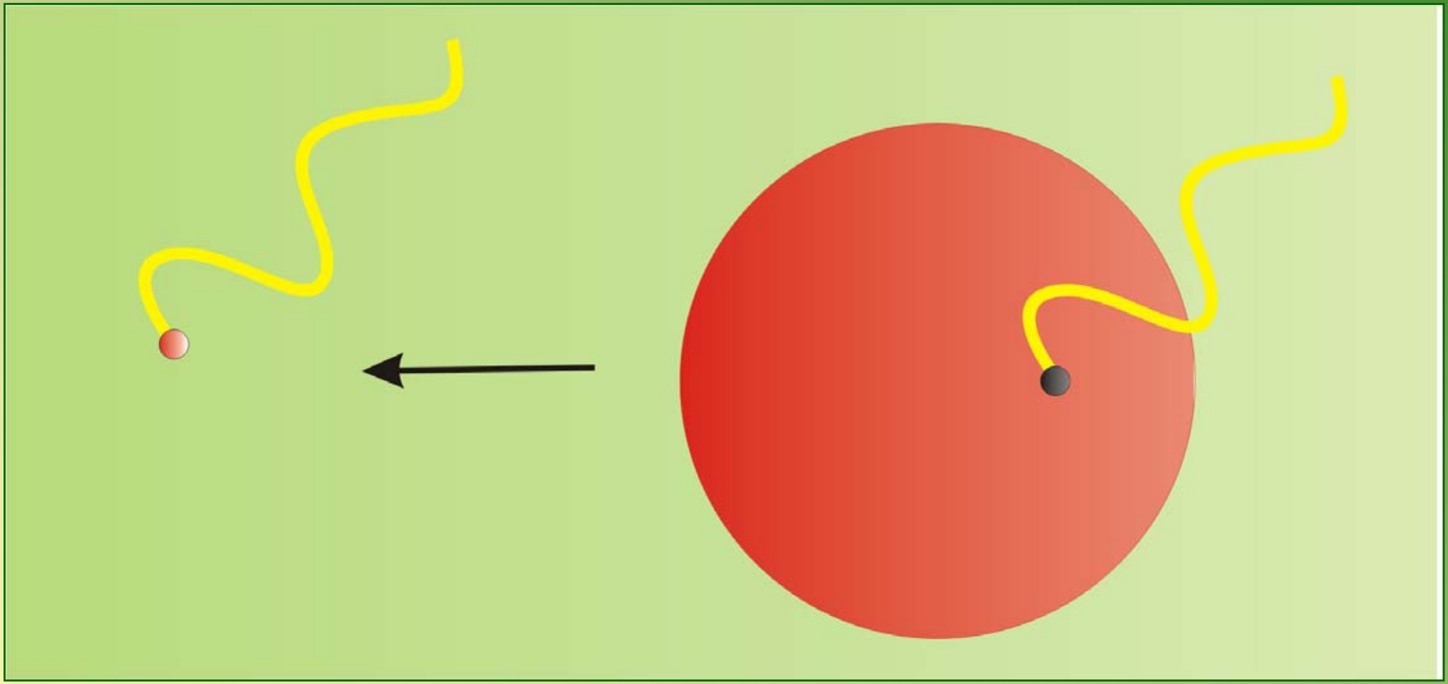
***Antecedente (Dumortier, 1986)*:**

❖Ejemplo de 9-jet en R^2 cuyo flujo a tiempo uno (difeomorfismo) *no es estabilizable.*

❖Ejemplo de 9-jet en R^3 (codimensión 60) *no estabilizable.*

Pregunta: ¿Cuál es la codimensión mínima para la cual existen jets no estabilizables para la equivalencia topológica?

Tangentes iteradas

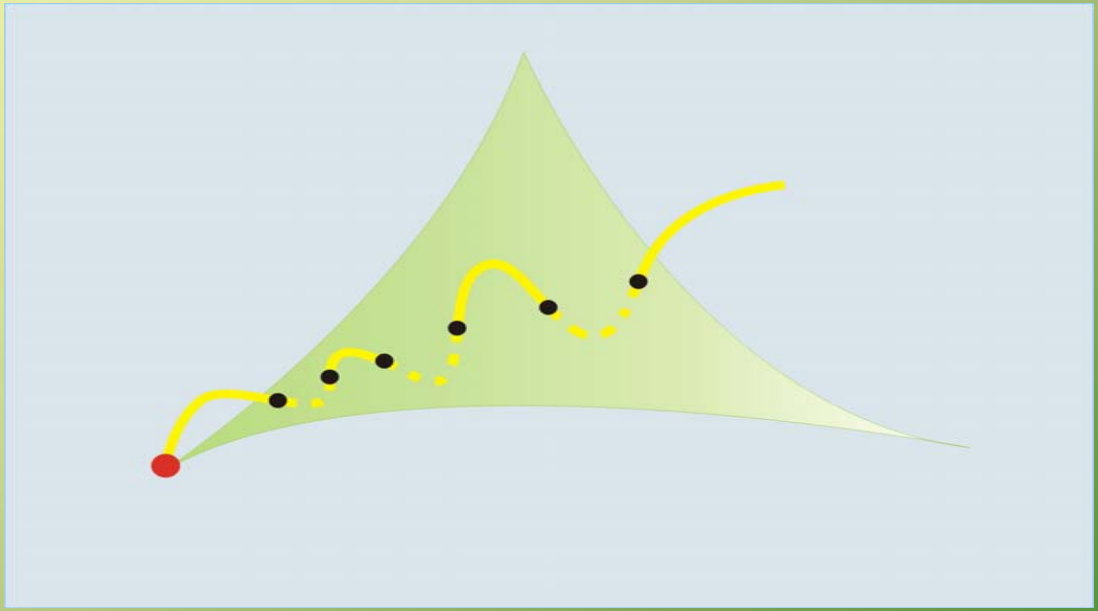


Tenemos una <u>*tangente*</u> si después de una explosión la trayectoria se acumula en un único punto del divisor excepcional

Tenemos <u>*tangentes iteradas*</u> si esto se repite indefinidamente al explotar de nuevo

Trayectorias oscilantes

Una trayectoria es *oscilante* cuando corta infinitas veces a alguna superficie analítica

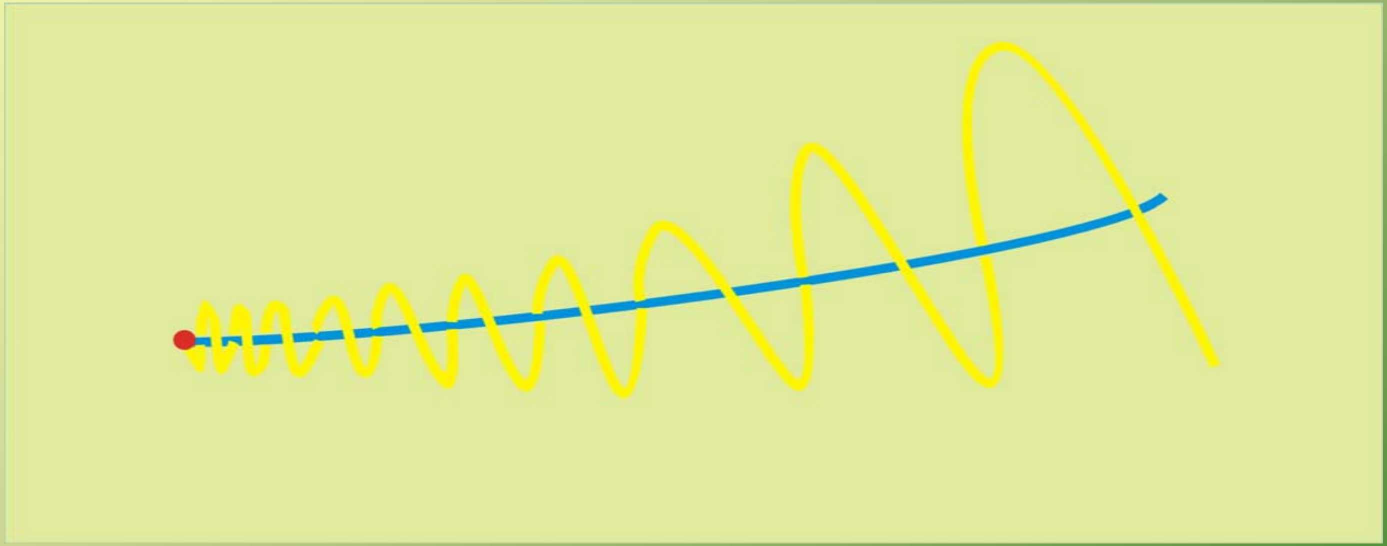


No oscilación $\longrightarrow$ *Tangentes iteradas*

$\not\longleftarrow$

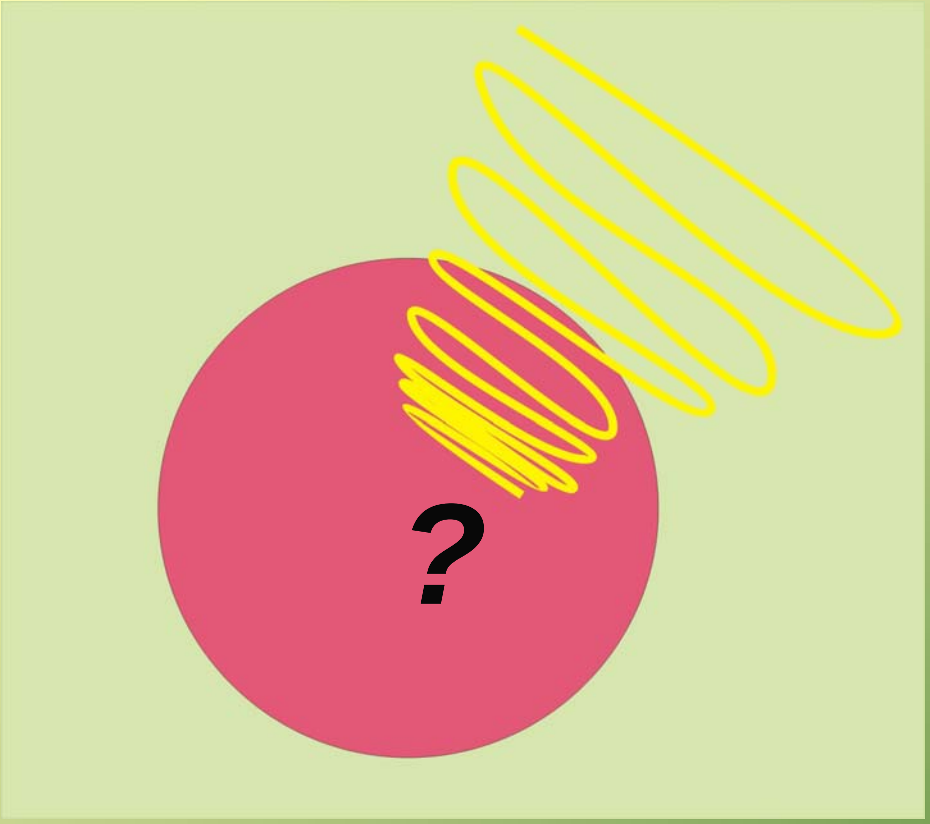
Ejes de giro en espiral

Teorema (Cano-Moussu-Sanz): Si hay oscilación y tangentes iteradas simultáneamente, entonces aparece un *eje de giro en espiral*.



Un *eje de giro en espiral* es una curva analítica alrededor de la cual gira la trayectoria y con las mismas tangentes iteradas que ella.

Límite de las secantes (Oviedo-Valladolid)



Pregunta:¿Es posible que una trayectoria se acumule sobre el divisor excepcional de alguna forma no prevista por el Teorema de Poincaré-Bendixon?