

# Numerical techniques for large dimensional dynamical systems

Recent Trends in Nonlinear Science 2015

Técnicas numéricas de continuación

## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Continuación en el parámetro</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Pseudo longitud de arco de Keller</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Estabilidad</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Repaso de la teoría</b>	<b>17</b>
5.1	Álgebra lineal . . . . .	17
5.2	Teoría básica de bifurcaciones . . . . .	19
5.2.1	Preliminares . . . . .	19
5.2.2	Caso de $f_\lambda \notin \text{col}(f_u)$ . . . . .	20
5.2.3	Caso $f_\lambda \in \text{col}(f_u)$ . . . . .	23
5.3	Bifurcaciones con rotura de simetría . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Rudimentos de cálculo de puntos de bifurcación</b>	<b>34</b>
6.1	Detección de puntos de bifurcación . . . . .	34
6.2	Puntos de bifurcación . . . . .	34
6.2.1	Bifurcación de Hopf . . . . .	34
6.2.2	Pliegues . . . . .	35
6.2.3	Puntos de ramificación . . . . .	36
6.3	Cambios de rama en un punto de ramificación . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Cuestiones y Ejercicios</b>	<b>41</b>

### Introducción

En los cursos elementales de métodos numéricos se explican métodos para resolver ecuaciones no lineales, y en ocasiones, sistemas de ecuaciones no lineales. Frecuentemente en la práctica dichas ecuaciones o sistemas de ecuaciones dependen de parámetros. En esta lección estudiaremos técnicas numéricas que permitan estudiar la dependencia de la solución de uno de dichos parámetros.

# 1 Introducción

Nos dedicaremos a resolver la ecuación

$$f(u, \lambda) = 0,$$

donde  $f$  es un campo de  $m$  componentes y  $m + 1$  argumentos, de los que los  $m$  primeros los agrupamos en el vector

$$u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m,$$

y el restante lo denotaremos por  $\lambda$ , esto es

$$f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En general en lo que sigue y salvo que indiquemos lo contrario, utilizaremos notación vectorial, y reservaremos las letras minúsculas para vectores (columna), denotando sus componentes (cuando sea necesario referirse a ellas explícitamente) mediante subíndices, como en el caso del vector  $u$  anterior, las mayúsculas para matrices, y las letras griegas minúsculas para escalares, (parámetros en nuestro contexto). Así mismo en lo que sigue,  $\|\cdot\|$  denotará la norma euclídea, que, recordemos, para un vector

$$x = [x_1, \dots, x_m]^T,$$

de  $\mathbb{R}^m$  tiene la expresión

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2}.$$

**Ejemplo 1** El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3u_1(1 - u_1) - u_1u_2 - \lambda(1 - e^{-5u_1}) &= 0, \\ -u_2 + 3u_1u_2 - \mu(1 - e^{-3u_2}) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

modela el equilibrio de sardinas y grandes túnidos sometidos ambos a pesca sujeta a cuota, siendo  $u_1$  y  $u_2$  las poblaciones de sardinas y túnidos respectivamente, y  $\lambda$  y  $\mu$  las correspondientes cuotas. Tomando  $\mu$  en función de  $\lambda$  como

$$\mu(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(10 + \lambda^2)^2},$$

el sistema anterior lo podemos escribir como  $f(u, \lambda) = 0$  donde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad f(u, \lambda) = \begin{bmatrix} 3u_1(1 - u_1) - u_1u_2 - \lambda(1 - e^{-5u_1}) \\ -u_2 + 3u_1u_2 - \mu(\lambda)(1 - e^{-3u_2}) \end{bmatrix},$$

En la práctica interesa saber cuáles son las poblaciones de dichas especies en función de la cuota  $\lambda$ , para poder elegir adecuadamente este valor. Una mala elección puede traducirse en una drástica disminución de una o de ambas poblaciones, con los consiguientes efectos perniciosos sobre las flotas y las industrias pesqueras que viven de la captura de dichas especies.

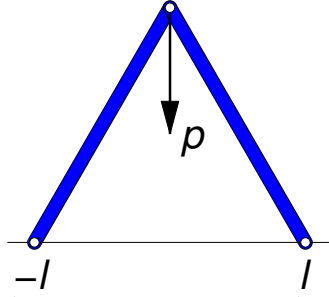
**Ejemplo 2** La solución  $(x, y)$  del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} kl_0 \left( \frac{x+l}{r_1} + \frac{x-l}{r_2} \right) - 2kx &= 0, \\ kl_0 \left( \frac{y}{r_1} + \frac{y}{r_2} \right) - 2ky - p &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $l_0$ ,  $l$  y  $p$  son dos valores dados satisfaciendo  $l_0 > l > 0$ , y

$$r_1 = \sqrt{l^2 + 2lx + x^2 + y^2}, \quad y \quad r_2 = \sqrt{l^2 - 2lx + x^2 + y^2},$$

son las coordenadas cartesianas del punto más alto de un pórtico en equilibrio formado por dos barras (de comportamiento similar a un muelle con constante  $k$  N/m, y de longitud natural  $l_0$  metros), apoyadas en los puntos de coordenadas  $(-l, 0)$ , y  $(l, 0)$  (en metros), articuladas en su unión y en sus soportes, y soportando una carga de  $p$  N.



Nótse que las dos ecuaciones del sistema (2) son

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

donde  $V$  es la energía potencial, dada por la energía elástica más el trabajo realizado por la carga  $p$ , esto es

$$V(x, y) = \frac{1}{2}k(r_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(r_2 - l_0)^2 + p(y - y_0),$$

donde  $y_0 = \sqrt{l_0^2 - l^2}$ .

Dividiendo las dos ecuaciones en (2) por  $kl$  e introduciendo las variables y parámetros *adimensionales*

$$u_1 = x/l, \quad u_2 = y/l, \quad \lambda = p/(kl), \quad y \quad \mu = l_0/l$$

(nótese que  $\mu > 1$ ) el sistemas de ecuaciones (2) se reescribe como

$$f(u, \lambda) = 0,$$

donde, para cada  $\mu > 0$ ,

$$f(u, \lambda) = g(u, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mu \left( \frac{u_1 + 1}{d_1} + \frac{u_1 - 1}{d_2} \right) - 2u_1 \\ \mu \left( \frac{u_2}{d_1} + \frac{u_2}{d_2} \right) - 2u_2 - \lambda \end{bmatrix}, \quad (3)$$

y

$$d_1 = \sqrt{1 + 2u_1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad y \quad d_2 = \sqrt{1 - 2u_1 + u_1^2 + u_2^2}.$$

En lo que sigue, siempre denotaremos por  $e_1, \dots, e_m$  a los *vectores coordenados* de  $\mathbb{R}^m$  y  $e = [1, \dots, 1]^T$  al vector de unos, siempre que no haya riesgo de confundirlo con el número  $e = 2.71728182\dots$ . Con esta notación, observemos que las cantidades  $d_1$  y  $d_2$  se reescriben como

$$d_1 = \|u + e_1\|, \quad d_2 = \|u - e_1\|,$$

Así mismo, la expresión de  $f$  en (3) se puede escribir como

$$f(u, \lambda) = g(u, \lambda, \mu) = \mu \left( \frac{1}{d_1}(u + e_1) + \frac{1}{d_2}(u - e_1) \right) - 2u - \lambda e_2. \quad (4)$$

Interesa en la práctica determinar la contracción de las barras del pórtico en función de la carga  $p$  así como determinar la estabilidad del mismo. Pensemos que una posible configuración del mismo es cuando las barras están horizontales ( $x = y = 0$ ) y la carga  $p$  es nula, pero intuitivamente vemos que dicha configuración es inestable para  $l_0 > l$ , ya que un pequeño desplazamiento hacia arriba del punto de unión de las dos barras desestabilizaría esta configuración y la estructura volvería a su configuración natural, en que las dos barras recuperan su longitud natural  $l_0$  ( $x = 0, y = \sqrt{l_0^2 - l^2}$ ).

---

Notemos que si, la matriz jacobiana

$$f_u = \begin{bmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \dots & \partial_{u_m} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} f_m & \dots & \partial_{u_m} f_m \end{bmatrix}$$

tiene rango máximo para un valor  $\lambda_0$  de  $\lambda$  y  $u_0$  de  $u$  (esto es para la solución  $u_0$  de  $f(u, \lambda_0)$ ), entonces, según el teorema de la función implícita, para valores cercanos del parámetro tenemos una curva  $u = u(\lambda)$  de soluciones

$$f(u(\lambda), \lambda) = 0.$$

Esta es la idea que subyace a los métodos de cálculo de soluciones que explicamos en las secciones siguientes.

Los métodos de cálculo que describiremos posteriormente, no obstante, utilizan en general el método de Newton. Finalizamos esta sección mostrando para los dos ejemplos que hemos descrito anteriormente programas que implementan las funciones que dados  $u$  y  $\lambda$  calculan  $f(u, \lambda)$  y la matriz jacobiana de  $f$ .

**Ejemplo 1 (continuación).** Programas (funciones) de MATLAB u OCTAVE que implementen esta función y su matriz jacobiana pueden ser los siguientes.

```
function f=funp(u,lambda)
% funci'on del modelo predador presa con pesca.
% Primero el par'ámetro mu
mu=lambda^4/(10+lambda^2)^2;
```

```

f=[3*u(1)*(1-u(1)) - u(1)*u(2) - lambda*(1-exp(-5*u(1))); ...
   -u(2) + 3*u(1)*u(2) - mu*(1-exp(-3*u(2)))];

function J=jfunp(u,lambda)
% Jacobiano de la funci'on del modelo predador presa con pesca
% primero el par'ámetro mu
mu=lambda^4/(10+lambda^2)^2;
%f=[3*u(1)*(1-u(1)) - u(1)*u(2) - lambda*(1-exp(-5*u(1))); ...
   -u(2) + 3*u(1)*u(2) - mu*(1-exp(-3*u(2)))];
j11=3 - 6*u(1) - u(2) - 5*lambda*exp(-5*u(1));
j22=-1 + 3*u(1) - 3*mu*exp(-3*u(2));
J=[j11, -u(1); 3*u(2), j22];

```

---

**Ejemplo 2 (continuación).** Programas (funciones) de MATLAB u OCTAVE que implementen la función (4) y su matriz jacobiana pueden ser por ejemplo los siguientes.

```

function f=funp(u,par)
% funci'on del modelo DE LAS DOS BARRAS-MUELLE en coordenadas cartesianas
lambda=par(1); mu=par(2);
e1=[1; 0]; e2=[0; 1];
d1=norm(u+e1); d2=norm(u-e1);
f=mu*((u+e1)/d1 + (u-e1)/d2) - 2*u - lambda*e2;

function J=jfunp(u,par)
% Jacobiano de la funci'on del del modelo
% DE LAS DOS BARRAS-MUELLE en coordenadas cartesianas
lambda=par(1); mu=par(2);
e1=[1; 0]; e2=[0; 1];
d1=norm(u+e1); d2=norm(u-e1);
%f=mu*((u+e1)/d1 + (u-e1)/d2) - 2*u - lambda*e2;
% En Dd1 y Dd2 las diferenciales de d1 y d2
Dd1=-(u+e1)'/d1^3; Dd2=-(u-e1)'/d2^3;
J=mu*(eye(2)*(1/d1 + 1/d2) + (u+e1)*Dd1 + (u-e1)*Dd2) - 2*eye(2);

```

---

## 2 Continuación en el parámetro

Un procedimiento sencillo para estudiar cómo depende  $u$  del parámetro  $\lambda$  es calcular la solución para diversos valores del parámetro. Se conoce con el nombre de *continuación en el parámetro* o

*continuación natural* (véase por ejemplo [2, § 2.3.1], [5, § 10.2]). Dado que, típicamente el sistema  $f(u, \lambda) = 0$  se debe resolver por el método de Newton, y éste sólo converge si el iterante inicial está suficientemente cerca de la solución, en el procedimiento de continuación en el parámetro se parte de un valor  $\lambda_0$  de  $\lambda$  para el que se sepa la solución  $u_0$  (o sea fácil calcularla porque para dicho valor del parámetro el problema  $f(u, \lambda) = 0$  es lineal) y se procede a calcular la solución para valores del parámetro que se obtienen cada uno del anterior con un pequeño incremento, esto es, para

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + h, \quad n = 1, 2, \dots,$$

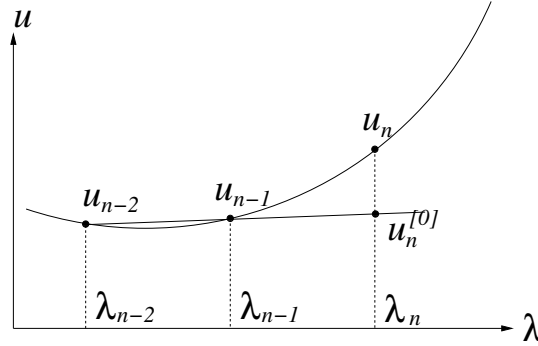
se calcula (por el método de Newton) la solución  $u_n$  del problema

$$f(u, \lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

utilizando como iterante inicial para el método de Newton la solución correspondiente al parámetro anterior o una extrapolación de la soluciones correspondientes a parámetros anteriores, esto es,

$$u_n^{[0]} = u_{n-1}, \quad \text{o} \quad u_n^{[0]} = u_{n-1} + h \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}.$$

Una representación gráfica de la curva  $f(u, \lambda) = 0$  en el caso en que la dimensión  $m$  es  $m = 1$  y de los puntos que se obtienen por este procedimiento lo tenemos en la siguiente figura.



El valor  $h$  del incremento de  $\lambda$  se elige en principio en función de la densidad de puntos con la que queramos obtener la curva  $u = u(\lambda)$ , pero se ajusta en función de la dificultad con la que se resuelva por el método de Newton en problema  $f(u, \lambda_n) = 0$ . Bien puede ocurrir que para un determinado valor de  $n$ , el valor de  $h$  que hasta ese momento se ha utilizado deje de ser válido porque el método de Newton no converge con el iterante inicial que le proporcionamos (bien el extrapolado de valores anteriores, bien el valor  $u_{n-1}$  correspondiente a  $\lambda_{n-1}$ ). Por ello, para resolver  $f(u, \lambda_n) = 0$ , es aconsejable utilizar un algoritmo como el que mostramos a continuación.

- 1)  $h \leftarrow 2h$ .
- 2) Mientras no se haya calculado  $u_n$  repetir lo siguiente:
  - 2.1)  $h \leftarrow h/2$ ,
  - 2.2)  $\lambda \leftarrow \lambda + h$ ,
  - 2.3)  $u^{[0]} \leftarrow u_{n-1} + h \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}$ ,

2.4) Intentar resolver  $f(u, \lambda) = 0$  por el método de Newton partiendo de  $u^{[0]}$ .

3)  $\lambda_n \leftarrow \lambda, \quad u_n \leftarrow u.$

Puesto que no hay garantía de que el método de Newton converja para valores de  $h > 0$ , el algoritmo anterior puede caer en un bucle infinito, por lo que es aconsejable cambiar la línea 2) por la siguiente,

2) Mientras no se haya calculado  $u_n$  y  $h \geq h_{\min}$  repetir lo siguiente:

donde  $h_{\min}$  es un valor fijado de antemano, y la línea 3) por la siguiente

3) Si  $h \geq h_{\min}$

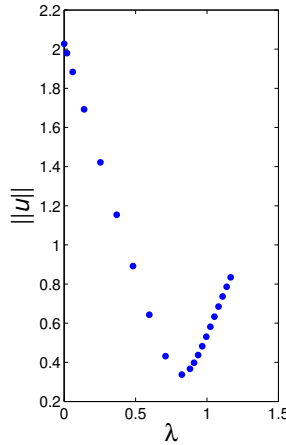
$\lambda_n \leftarrow \lambda, \quad u_n \leftarrow u.$

en caso contrario

abandonar el cálculo de  $u$ .

Así mismo para evitar calcular con valores de  $h$  innecesariamente pequeños, es aconsejable duplicar dicho valor (siempre que no se sobrepase un valor  $h_{\max}$  prefijado de antemano) si el número de iteraciones en la última aplicación del método de Newton es 2 o menos, y dividirlo por dos (siempre que no nos quede un valor menor que  $h_{\min}$ ) si es 4 o más.

**Ejemplo 1 (continuación).** Para  $\mu = \lambda = 0$  es fácil comprobar que una solución no trivial de (1) es  $u = [1/3, 2]^T$ . Partiendo de este valor y tomando  $h = 0.02$ ,  $h_{\max} = 0.1$  y  $h_{\min} = 10^{-10}$ , calculamos 20 puntos de la curva  $u = u(\lambda)$  y representamos  $\|u\|$  frente a  $\lambda$ , obteniendo la siguiente gráfica.

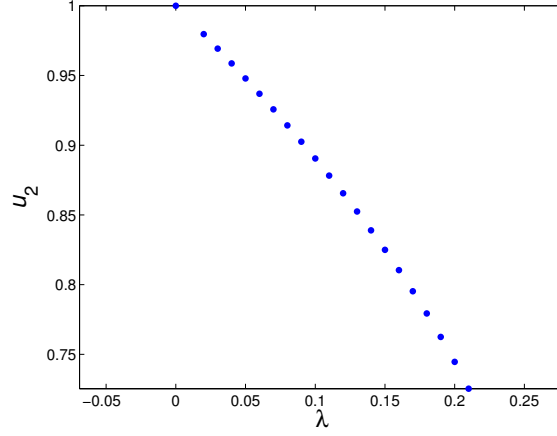


Nótse como al principio se dobla varias veces el valor de  $h$  hasta alcanzar el máximo posible, para ser reducido cerca del mínimo de  $\|u\|$ , momento a partir del cual apenas varía.

---

**Ejemplo 2 (continuación).** Para  $\mu = 1/\cos(\pi/4) = \sqrt{2}$  (las barras del pórtico sin carga forman un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal) la solución no trivial para la carga  $\lambda = 0$  es, por tanto,  $u = [0, 1]^T$ . Partiendo de este valor y tomando  $h = 0.02$ ,  $h_{\max} = 0.1$  y  $h_{\min} = 10^{-10}$ , los 20 primeros puntos

de la curva  $u = u(\lambda)$  calculados con el procedimiento de continuación en el parámetro descrito anteriormente pueden verse en la siguiente figura, donde representamos la altura  $u_2$  frente a  $\lambda$ .

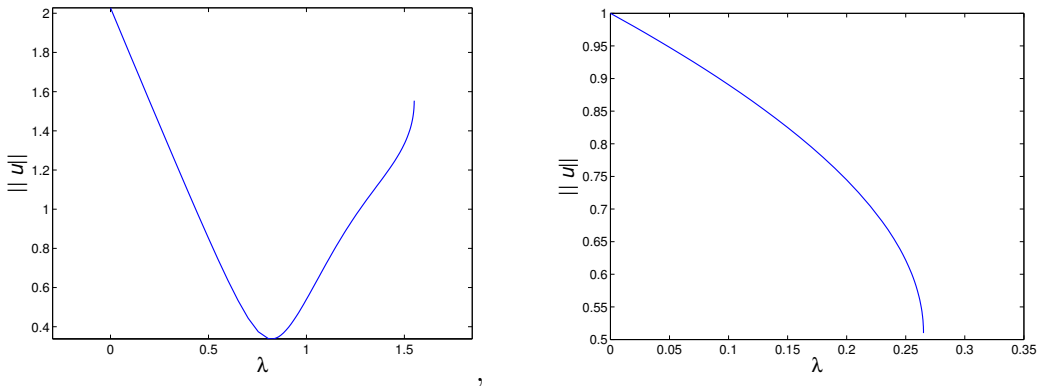


Nótse como el incremento inicial  $h = 0.2$  es demasiado grande (el cálculo del primer punto por el método de Newton requiere 4 iteraciones o más) y es dividido por 2, permaneciendo este valor sin alterar en el cálculo de los 19 puntos restantes.

### 3 Pseudo longitud de arco de Keller

La técnica de continuación que tratamos en esta sección recibe el nombre de *pseudo longitud de arco*, y se debe a Herbert Bishop Keller en 1977 (véase por ejemplo [4], [2, § 2.3.2], [5, § 10.2]). Permite superar las dificultades que encuentra la técnica de continuación en el parámetro en puntos límite o pliegues.

**Ejemplos 1 y 2 (continuación).** Si en la sección anterior en lugar de 20 puntos tratamos de calcular 200 (partiendo de una solución no trivial en  $\lambda = 0$ , con  $h = 0.02$ ,  $h_{\max} = 0.04$  y  $h_{\min} = 10^{-10}$ ) obtenemos que no es posible hacer converger al método de Newton en  $n = 129$  ( $\lambda_n = 1.5501$ ) en el Ejemplo 1 y en  $n = 90$  ( $\lambda_n = 0.2650$ ) en el Ejemplo 2, a pesar de ser  $h < 10^{-10}$ . Representando gráficamente  $\|u\|$  frente a  $\lambda$  obtenemos lo mostrado en las siguientes figuras, donde la de la izquierda corresponde al Ejemplo 1 y la de la derecha al 2.





En ambos casos vemos que la gráfica de  $\|u\|$  parece volverse vertical en las cercanías del valor  $\lambda_*$  para el que falla el método de Newton, o, dicho de otro modo,

$$\frac{d}{d\lambda} \|u(\lambda)\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_*} \infty,$$

Dado que

$$\frac{d}{d\lambda} \|u(\lambda)\| = \frac{1}{\|u\|} \frac{du}{d\lambda},$$

y como vemos,  $\|u\|$  es finito, concluimos que

$$\frac{du}{d\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_*} \infty,$$

Ahora bien, nótese que derivando respecto de  $\lambda$  en  $f(u, \lambda) = 0$  tenemos que

$$f_u \frac{du}{d\lambda} + f_\lambda = 0, \quad (5)$$

y para los Ejemplos 1 y 2 las derivadas parciales con respecto de  $\lambda$  son, respectivamente

$$f_\lambda(u, \lambda) = \begin{bmatrix} -(1 - e^{-5u_1}) \\ -\mu_\lambda(1 - e^{-3u_2}) \end{bmatrix}, \quad \mu_\lambda = \frac{40\lambda^3}{(10 + \lambda^2)^3}, \quad f_\lambda(u, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ambas finitas (pues  $u$  y  $\lambda$  lo son). Dividiendo en (5) por  $\|du/d\lambda\|$  y haciendo tender  $\lambda$  a  $\lambda_*$  concluimos que para

$$v = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} \frac{du/d\lambda}{\|du/d\lambda\|},$$

que<sup>1</sup>, obviamente es un vector de norma 1, se tiene que

$$f_u v = 0.$$

Tenemos pues que la diferencial  $f_u$  no tiene rango máximo y, por tanto, el teorema de la función implícita no nos permite despejar  $u$  en función de  $\lambda$ .

---

En la técnica de pseudo longitud de arco de Keller, para calcular un nuevo punto  $(u_n, \lambda_n)$  sobre la curva  $f(u, \lambda) = 0$  se completan las ecuaciones  $f(u, \lambda) = 0$  con la exigencia de que al proyectar el nuevo punto  $(u_n, \lambda_n)$  sobre la recta tangente a la curva en el último punto calculado  $(u_{n-1}, \lambda_{n-1})$  la proyección esté a una distancia  $\Delta s$  prefijada de antemano. Precisemos esto.

---

<sup>1</sup>La prueba de la existencia de dicho límite se sale del ámbito de este curso. Aquéllos con ciertos conocimientos de análisis matemático podrán entender sin dificultad, sin embargo, que dicho límite existe al menos para una sucesión de valores  $\lambda_n$  con  $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$  cuando  $n \rightarrow \infty$

En lo que sigue las letras negritas las utilizaremos para denotar vectores ampliados con el parámetro.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}$$

Denotaremos por  $\mathbf{t}$  el vector unitario tangente a la curva  $u = u(\lambda)$ . Recuérdese que dicho vector tangente unitario es

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad t = \dot{u}, \quad \tau = \dot{\lambda}.$$

donde aquí y en lo que sigue el punto denota derivada con respecto a la longitud de arco. Si parametrizamos la curva  $u = u(\lambda)$  en función de la longitud de arco  $s$ , derivando con respecto a  $s$  en la igualdad  $f(u, \lambda) = 0$  tenemos que

$$f_u \dot{u} + f_\lambda \dot{\lambda} = 0, \quad (6)$$

ecuación que utilizaremos posteriormente para explicar cómo calcular la tangente  $\mathbf{t}$

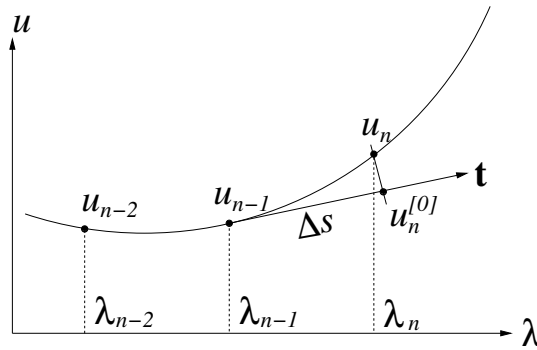
Introducida la notación anterior, estamos en condiciones de dar los detalles de la técnica de continuación en la pseudo longitud de arco de Keller. Como hemos indicado,

si  $\mathbf{t}_r = \begin{bmatrix} t_r \\ \tau_r \end{bmatrix}$ , es la tangente a la curva en un punto de referencia  $(u_r, \lambda_r)$  en la misma,

(típicamente, el último punto calculado,  $(u_r, \lambda_r) = (u_{n-1}, \lambda_{n-1})$ ) el nuevo punto  $(u_n, \lambda_n)$  es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} f(u, \lambda) &= 0 \\ t_r^T(u - u_r) + \tau_r(\lambda - \lambda_r) &= \Delta s. \end{aligned} \right\}, \quad \text{o, abreviadamente,} \quad \left. \begin{aligned} f(u, \lambda) &= 0 \\ \mathbf{t}_r \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_r) &= \Delta s. \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

tal y como indicamos en el siguiente esquema para el caso  $m = 1$ .

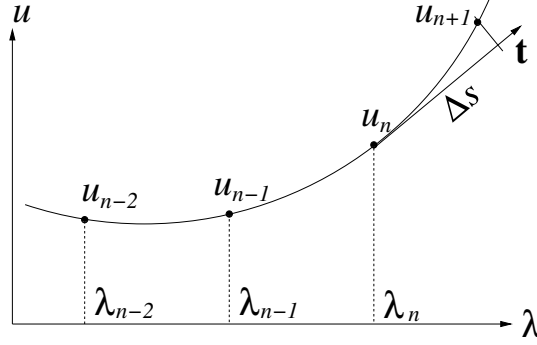


Mencionemos que el iterante inicial  $\mathbf{u}_n^{[0]}$  para el método de Newton, se toma a distancia  $\Delta s$  de  $\mathbf{u}_r$  sobre la recta tangente, esto es

$$\mathbf{u}_n^{[0]} = \mathbf{u}_r + \Delta s \mathbf{t}_r = \begin{bmatrix} u_r \\ \lambda_r \end{bmatrix} + \Delta s \begin{bmatrix} t_r \\ \tau_r \end{bmatrix}$$

Una vez calculado el nuevo punto  $(u_n, \lambda_n)$ , procedemos a calcular el siguiente punto  $(u_{n+1}, \lambda_{n+1})$  repitiendo lo hecho para calcular  $(u_n, \lambda_n)$  con los cambios correspondientes, tal y como indicamos

en el siguiente esquema.



Para el cálculo de la nueva tangente  $\mathbf{t}_n$  en el punto  $(u_n, \lambda_n)$ , que, típicamente, pasa ahora a ser el punto de en la curva, podemos completar las ecuaciones (6) con exigir que el producto escalar con  $\mathbf{t}_r$  sea 1, esto es, encontramos la

$$\text{solución } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \text{ del sistema } \left. \begin{aligned} f_u x + f_\lambda \xi &= 0 \\ \mathbf{t}_r \cdot \mathbf{x} &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

donde  $f_u$  y  $f_\lambda$  están evaluados en  $(u_n, \lambda_n)$ . Una vez calculado el vector  $\mathbf{x}$ , procedemos a normalizarlo para obtener el vector unitario,  $\mathbf{t}$

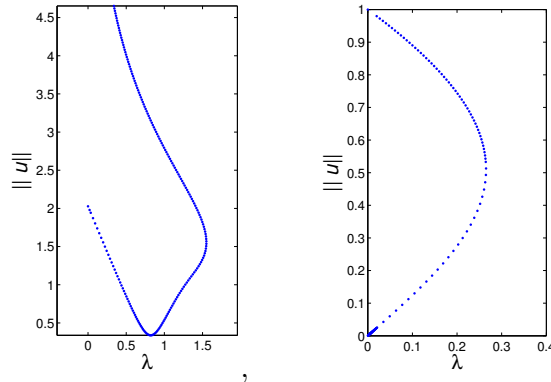
$$\mathbf{t}_n = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Nótese que previo al cálculo de la tangente  $\mathbf{t}_n$  al calcular el propio punto  $(u_n, \lambda_n)$  al aplicando el método de Newton para resolver las ecuaciones (7) se deben encontrar

$$\text{los incrementos } \mathbf{e}^{[k]} = \begin{bmatrix} e^{[k]} \\ \epsilon^{[k]} \end{bmatrix} \text{ resolviendo sistemas de la forma } \left. \begin{aligned} f_u e^{[k]} + f_\lambda \epsilon^{[k]} &= -f^{[k]} \\ \mathbf{t}_r \cdot \mathbf{e}^{[k]} &= -\delta^{[k]} \end{aligned} \right\},$$

(donde  $f_u$  y  $f_\lambda$  están evualdos en el iterante  $(u_n^{[k]}, \lambda_n^{[k]})$ ) siendo la matriz de coeficientes de estos sistemas la misma que la del sistema (8). De este modo, la última factorización de estas matrices que se haya hecho en el método de Newton se puede aprovechar para el cálculo de la tangente.

**Ejemplos 1 y 2 (continuación).** Si en vez de continuación en el parámetro como hemos hecho al principio de esta sección, utilizamos la técnica de la pseudolongitud de arco de Keller para calcular 200 200 (partiendo de una solución no trivial en  $\lambda = 0$ , con  $h = 0.02$ ,  $h_{\max} = 0.04$  y  $h_{\min} = 10^{-10}$ , igual que antes) obtenemos las gráficas que a continuación mostramos



donde vemos que con esta técnica hemos sido capaces de calcular puntos en la curva superado el punto de retorno.

## 4 Estabilidad

Las soluciones de

$$f(u, \lambda) = 0,$$

son los equilibrios del sistema

$$u' = f(u, \lambda), \tag{9}$$

donde

$$u' = \frac{d}{dt}u,$$

o, en el caso de problemas de segundo orden

$$Mu'' = f(u, \lambda), \tag{10}$$

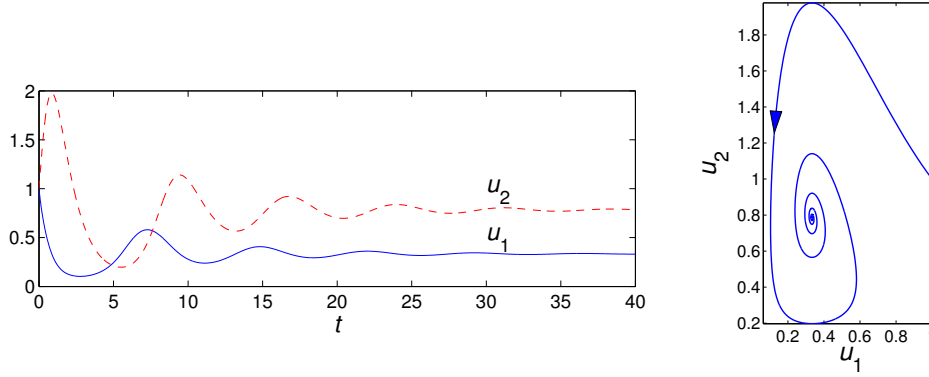
siendo  $f = -\nabla V(u, \lambda)$  el opuesto del gradiente de un cierto potencial  $V$ , y  $M$  una matriz simétrica y definida positiva.

En la práctica interesa saber si dichos equilibrios son estables o inestables. En el primer caso, un equilibrio  $(u_0, \lambda_0)$  de (9) es asintóticamente estable si la matriz jacobiana

$$f_u = \begin{bmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \dots & \partial_{u_m} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} f_m & \dots & \partial_{u_m} f_m \end{bmatrix}$$

evaluada en el punto de equilibrio,  $f_u(u_0, \lambda_0)$  tiene todos sus autovalores con parte real estrictamente negativa; será inestable si hay algún autovalor con parte real estrictamente positiva, y no se puede a priori determinar la estabilidad del equilibrio si no hay ningún autovalor con parte real estrictamente positiva pero hay al menos uno con parte real nula. Cuando los autovalores de  $f_u$  tienen todos ellos parte real distinta de cero, el equilibrio correspondiente se dice *hiperbólico*. Los enunciados anteriores son bien conocidos pueden encontrarse en multitud de libros de texto (véanse por ejemplo, [2, § 1.5], [5, Theorem 1.5]). Un resultado más profundo, conocido como teorema de Hartman-Grobman relaciona el mápa de fase en un entorno del equilibrio con el del sistema lineal  $dx/dt = Ax$ , siendo  $A = f_u(u_0, \lambda_0)$  (véase por ejemplo [3, Theorem 7.1]).

**Ejemplo 1 (continuación).** Para  $\lambda = 0.5$  una de las soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  es  $u_1 = 0.3335\dots$ ,  $u_2 = 0.7831\dots$ . La matriz jacobiana  $f_u$  en dicho equilibrio tiene autovalores  $\sigma = -0.1153 \pm 0.8541i$ , con parte real negativa, luego estable. Mostramos a continuación la dos componentes  $u(t)$  de solución de  $u' = f(u, 0.5)$ , con  $u(0) = [1, 1]^T$ , frente al tiempo. Obsérvese cómo a medida que  $t$  crece cada componente de la solución converge a un valor constante (que es la correspondiente componente del equilibrio). Mostramos también la trayectoria de la solución, con indicación del sentido del avance del tiempo. Se aprecia la convergencia al equilibrio.



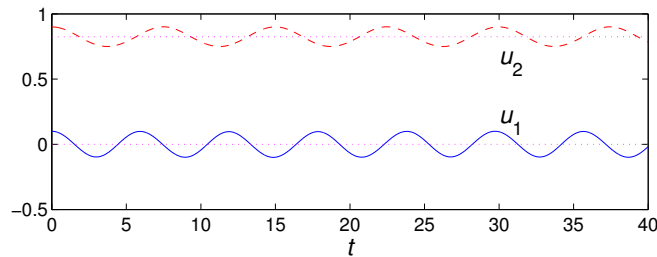
Componentes de la solución (izda.) frente al tiempo y trayectoria (dcha.) de la solución de  $u' = f(u, \lambda)$  con  $\lambda = 1/2$  y  $u(0) = [1, 1]^T$ .

En el segundo caso, un equilibrio  $(u_0, \lambda_0)$  de (10) es estable si  $f_u$  tiene todos sus autovalores estrictamente negativos, pues en este caso,  $u_0$  es en mínimo de la función

$$T(u, u') = \frac{1}{2}(u')^T M u' + V(u, \lambda)$$

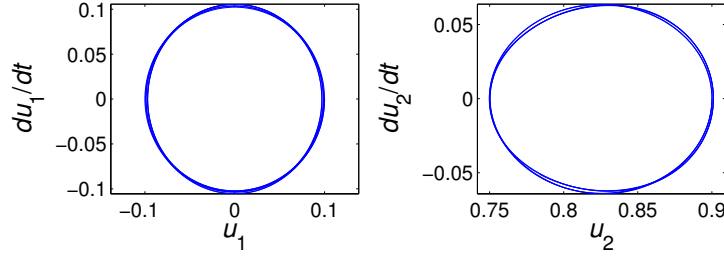
que, como bien sabemos, es una integral primera de (10) (las soluciones de (10) están, para  $\lambda$  fijo, en los conjuntos de nivel  $T(u, u') = 0$ ). Por la misma razón, el equilibrio  $(u_0, \lambda_0)$  será inestable si  $f_u(u_0, \lambda_0)$  tiene algún autovalor estrictamente positivo, y no se podrá determinar a priori la estabilidad del mismo si no habiendo autovalores estrictamente positivos, hay al menos un autovalor nulo.

**Ejemplo 2 (continuación).** Para  $\mu = 1/\cos(\pi/4)$  y  $\lambda = 0.5$  una de las soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  tiene por componentes  $u_1 = 0$  y  $u_2 = 0.8249 \dots$ . Los autovalores de la matriz jacobiana  $f_u$  en dicho equilibrio son  $\sigma_1 = -1.1164 \dots$  y  $\sigma_2 = -0.7017$ , ambos negativos, luego el equilibrio es estable (de hecho  $f_u$  es una matriz diagonal con dichos valores como componentes diagonales). En la siguiente figura representamos frente al tiempo las dos componentes de la solución  $u$  de  $u'' = f(u, \lambda)$  con dato inicial  $u(0) = [0.1, 0.9]^T$  y  $u'(0) = 0$ , y, en línea de puntos, del equilibrio mencionado,



junto con las trazas en los planos  $(u_1, u'_1)$  y  $(u_2, u'_2)$  de las trayectorias en la figura que mostramos

a continuación.



Observése como a medida que avanza el tiempo, aunque la solución  $u(t)$  no converge al equilibrio, sin embargo, no se aleja del mismo. El equilibrio, aun no siendo asintóticamente estable, es estable.

---

**Nota 1** En ocasiones, generalmente debido a cambios de variable que permite expresar el potencial  $V$  con mayor sencillez, en vez del sistema (10), se tiene el sistema

$$G^T \frac{d}{dt} (MGy') = f(y, \lambda), \quad (11)$$

donde  $f = -\nabla V(y, \lambda)$  y  $G = G(y)$  es una matriz no singular y, al igual que en (10),  $M$  es una matriz simétrica y definida positiva. En este caso, una integral primera viene dada por

$$T(y, y') = \frac{1}{2} (y' G^T) M G y + V(y, \lambda),$$

por lo que los equilibrios serán estables si, como en el caso de (10),  $f_y$  tiene todos sus autovalores estrictamente negativos. (Haga el Ejercicio 6).

**Nota 2** Recuerde que el sistema (10), cuando modela un sistema mecánico, es una idealización de la realidad en la que se desprecia la disipación de energía por fricción. En multitud de ejemplos, la fricción se modela añadiendo el término  $-Cu'$  al segundo miembro de (10), donde  $C$  es una matriz simétrica y definida positiva. Nótese que en este caso, para

$$T(u, u') = \frac{1}{2} (u')^T M u' + V(u, \lambda),$$

que en ausencia de fricción es una integral primera, ahora se tiene

$$\frac{d}{dt} T(u, u') = (u')^T (M u'' - f(u, \lambda)) = -(u')^T C u'.$$

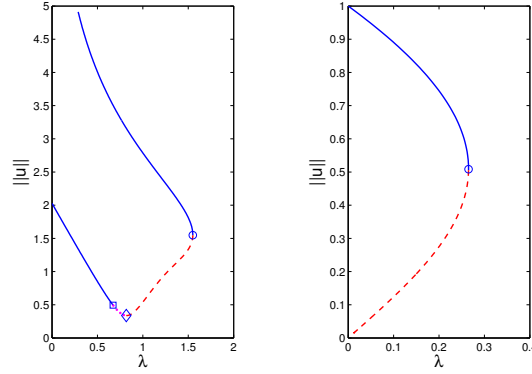
Al ser la matriz  $C$  definida positiva, se tiene que  $-(u')^T C u' < 0$  si  $u' \neq 0$ . Esto es, siempre que la velocidad no sea nula, se pierde energía. De este hecho se puede deducir que las soluciones que estén en un entorno del equilibrio, tienden al mismo cuando  $t \rightarrow \infty$ . En otras palabras, los equilibrios que en ausencia de rozamiento son estables pasan a ser asintóticamente estables cuando se considera el rozamiento.

**Ejemplos 1 y 2 (continuación).** A la vista de las figuras en la p. 11, podemos intuir que los equilibrios serán estables en una parte de la rama hasta llegar al punto de retorno, momento a partir del cual, tal y como nos explica la teoría serán inestables. En el caso del sistema (1), puesto que para la solución  $u = [1/3, 2]^T$  correspondiente a  $\mu = \lambda = 0$  es inmediato comprobar que su matriz jacobiana

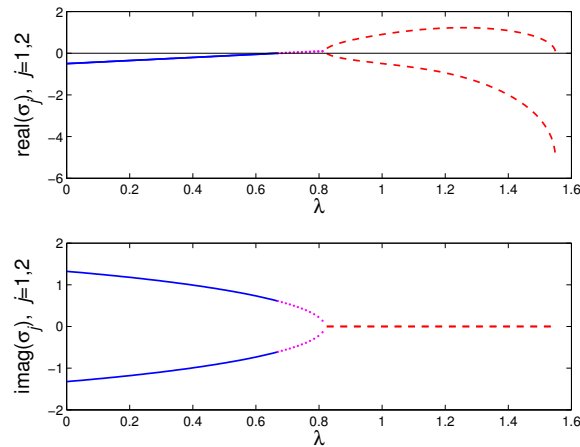
$$f_u = \begin{bmatrix} 3 - 6u_1 - u_2 & -u_1 \\ 3u_2 & -1 + 3u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda = -(1 \pm i\sqrt{7})/2$ , y por tanto es estable, intuimos que la parte inferior de la rama de equilibrios está formada por equilibrios estables. En el caso del Ejemplo 2, por consideraciones físicas, sabemos que es la parte superior la formada por equilibrios estables.

Procedemos a calcular los autovalores de las matrices jacobianas  $f_u$  de los equilibrios en ambos casos, obteniendo os resultados que a continuación mostramos, donde el color azul indica que todos los autovalores tienen parte real negativa, rojo (y línea discontinua) que hay un autovalor positivo y otro negativo, y morado (y línea de puntos) que los dos autovalores tienen parte real positiva.

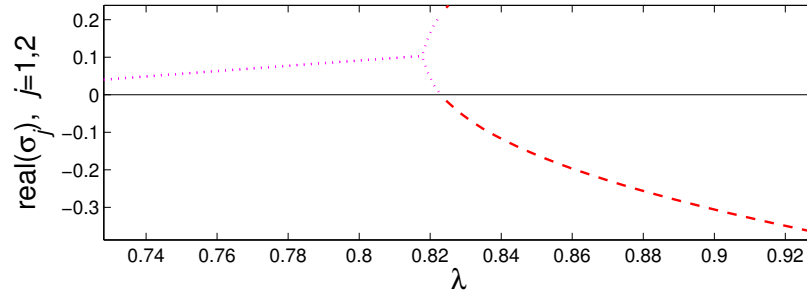


Si bien el caso del Ejemplo 2 es tal y como esperábamos, en el Ejemplo 1 nos llevamos la sorpresa de que en la parte inferior de la rama de equilibrios hay cambios de estabilidad antes de llegar al pliegue o punto de retorno. Las partes real e imaginaria de los dos autovalores de esta parte inferior de la rama las tenemos representadas en el siguiente gráfico,



donde vemos que hasta  $\lambda = 0.82$  aproximadamente hay dos autovalores complejos conjugados (tienen sus partes reales iguales, y por tanto, superpuestas en el gráfico superior, y sus imaginarias

distintas y de signo opuesto en el inferior). Dicha parte real crece hasta  $\lambda = 0.82$ , y que cerca de  $\lambda = 0.67$  pasa de negativa a positiva, en lo que se conoce como bifurcación de Hopf. Nótese también que en  $\lambda = 0.82$ , los dos autovalores complejos colapsan en uno real doble, que a partir de ese momento se separa en dos autovalores reales distintos (a partir de  $\lambda = 0.82$ , las partes imaginarias están superpuestas en el gráfico, y son iguales a cero). Uno de estos autovalores decrece y pasa de positivo a negativo como podemos ver en el siguiente gráfico



(cerca de  $\lambda=0.83$ ), donde salvo que haya una degeneración mayor, se cruzará con otra rama, en lo que se conoce como *punto de ramificación*. Le conviene hacer ahora el Problema 3.

---

Es bien conocido que, en general, el cálculo de autovalores es computacionalmente más costoso que la resolución de un sistema lineal, por lo que sería deseable saber el número de autovalores de parte real positiva sin necesidad de calcularlos. En el caso del sistema (10) esto es posible ya que al ser  $f_u$  simétrica, el teorema de inercia de Steiner nos garantiza que la terna formada por el número de autovalores positivos, negativos y nulos de  $f_u$ , conocida como *signatura*, es igual para cualquier otra matriz de la forma

$$R^T f_u R,$$

con  $R$  matriz no singular. Podemos encontrar una matriz de esta forma y cuya signatura sea fácil de calcular mediante la descomposición  $LDL^T$  por bloques. Dada una matriz  $A$  simétrica de dimensiones  $m \times m$ , una descomposición  $LDL^T$  de  $A$  por bloques (tal descomposición no es única) es una igualdad de la forma

$$PAP^T = LDL^T,$$

donde  $P$  es matriz de permutación,  $L$  es triangular inferior con diagonal de unos y  $D$  es matriz diagonal por bloques de tamaño  $1 \times 1$  o  $2 \times 2$ , esto es

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{pp} \end{bmatrix}, \quad D_{kk} \text{ matriz } 1 \times 1 \text{ o } 2 \times 2, \quad k = 1, \dots, p.$$

Nótese que es poco costoso computacionalmente calcular la signatura de la matriz de la matriz  $D$ . De hecho, si la descomposición  $LDL^T$  se obtiene con un algoritmo estable numéricamente (véase por ejemplo [1, S 4.4.3–4.]), si un bloque  $D_{kk}$  es  $2 \times 2$ , entonces tiene un autovalor positivo y otro negativo. Dichos algoritmos implementan una versión por bloques  $1 \times 1$  o  $2 \times 2$  de la eliminación gaussiana



con pivotaje por filas y columnas. Su costo computacional se encuentra entre  $O(m^3/6)$  y  $O(m^3/3)$  flops (dependiendo del algoritmo emplead) para una matriz  $m \times m$ . En MATLAB y OCTAVE la descomposición  $LDL^T$  se puede calcular con el comando `ldl`. En LAPACK, con la rutina `dsytrf`, y para matrices dispersas, con el conjunto de rutinas de prefijo `ma57` de la HSL Mathematical Software Library (antes, Harwell Subroutine Library). MATLAB y OCTAVE utilizan estas rutinas `ma57` para el cálculo de la descomposición  $LDL^T$  de matrices dispersas.

Encontrando pues una factorización

$$P^T f_u P = LDL^T$$

podemos conocer la signatura de  $f_u$  con un costo computacional generalmente considerablemente inferior que el del cálculo de sus autovalores.

## 5 Repaso de la teoría

### 5.1 Álgebra lineal

A continuación repasamos una serie de cuestiones que la experiencia demuestra que el lector suele tener olvidadas y cuyo dominio (que no sólo conocimiento) es muy útil para entender y aprovechar el repaso de la teoría básica de bifurcaciones que haremos después.

**Productos matriz por vector y combinaciones lineales.** En lo que sigue consideramos una matriz  $A$  de dimensiones  $m \times n$ . Los dos primeros hechos que no debe olvidar son los siguientes.

1. Si  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , el producto  $Ax$  es una combinación lineal de las columnas de  $A$ , siendo los escalares de dicha combinación lineal las componentes de  $x$ . En efecto, fijémonos que

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}, \quad \text{que coincide con} \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

2. Si  $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$ , el producto  $y^T A$  es una combinación lineal de las filas de  $A$ , siendo los escalares de dicha combinación lineal las componentes de  $y$ .

Gilbert Strang, afamado profesor del MIT, y que explicó álgebra lineal durante muchos años (entre otras cosas) afirmaba que el alumno que tuviese el reflejo de ver una combinación lineal de vectores como un producto matriz por vector y un producto matriz por vector como una combinación lineal de vectores, según interesase o conviniese, tenía ganada la mitad de la partida al álgebra lineal. Y tenía más razón que un santo. Métase los dos puntos anteriores en la cabeza. Le irá bastante mejor que si los ignora.

Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz. Si  $A$  es una matriz de dimensiones  $m \times n$  recuerde que el *espacio nulo* o *núcleo* de  $A$ , que se denota como  $\text{Nul}(A)$  (que también se denota como  $\text{Ker}(A)$  pues en la literatura en inglés se le conoce como "kernel of  $A$ ") es el subespacio

$$\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\},$$

y que el espacio *imagen* o *columna* de  $A$ , denotado como  $\text{col}(A)$  o  $R(A)$  (de la literatura en inglés "Range of  $A$ ") es el *espacio generado por sus columnas*, esto es

$$\text{col}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

(Aplique lo visto en (12)).

Recuerde que en el bachillerato o en primero aprendió (o debió aprender) que

$$\dim(\text{col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = n, \quad (13)$$

y que el

$$\text{el rango de } A \text{ es } \dim(\text{col}(A)),$$

que coincide (que es) el máximo número de columnas de  $A$  linealmente independientes. En la literatura en inglés, el rango recibe en nombre de "*rank*", y no debe confundirse con "range", que se refiere al espacio columna.

Recuerde así mismo que

$$\dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{col}(A^T)) \quad (14)$$

esto es, que *los rangos de  $A$  y  $A^T$  coinciden*. Reciben el nombre de *los cuatro subespacios fundamentales de una matriz  $A$*  los espacios columna y nulos de  $A$  y  $A^T$ .

Recuerde así mismo que dado un subespacio  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , el *espacio perpendicular* a  $V$  está formado por los vectores perpendiculares a todos los vectores  $V$  (o, simplemente, perpendiculares a una base de  $V$ ), y se denota como  $V^\perp$ , esto es

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v^T x = 0, \quad \forall v \in V\},$$

o,

$$\text{si } \{v_1, \dots, v_k\} \text{ es base de } V, \quad V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v_j^T x = 0, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

De esto último se deduce que

$$\text{Si } V \text{ es subespacio de } \mathbb{R}^n, \quad \dim(V^\perp) = n - \dim(V). \quad (15)$$

Además,

$$v \in V \cap V^\perp \Rightarrow v = 0,$$

(pues  $\|v\|^2 = v^T v$ , pero por ser a la vez  $v \in V$  y  $v \in V^\perp$  se tiene que  $v^T v = 0$ ), que junto con (15) implica que

$$\text{Si } V \text{ es subespacio de } \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp. \quad (16)$$

Note que también de (15) se deduce que

$$(V^\perp)^\perp = V. \quad (17)$$

Se tienen además las siguientes relaciones

$$\text{col}(A) = \text{Nul}(A^T)^\perp, \quad (18)$$

$$\text{Nul}(A) = \text{col}(A^T)^\perp, \quad (19)$$

Recuerde que la prueba de (18) es muy sencilla: Si  $y \in \mathbb{R}^m$  es de la forma  $Ax$  y  $w \in \mathbb{R}^m$  es tal que  $A^T w = 0$ , tenemos que

$$w^T y = w^T (Ax) = w^T Ax = \underbrace{(w^T A)}_{=0} x = 0,$$

que muestra que  $\text{col}(A) \subset \text{Nul}(A^T)^\perp$ ; pero, por un lado tenemos que el rango  $\text{rg}(A) = \dim(\text{col}(A))$ , y, por otro,  $\dim(\text{Nul}(A^T)^\perp) = m - \dim(\text{Nul}(A^T)) = m - (m - \text{rg}(A)) = \text{rg}(A)$ . Tenemos pues un espacio,  $\text{col}(A)$  contenido en otro,  $\text{Nul}(A^T)^\perp$ , y ambos tienen la misma dimensión, entonces deben ser iguales. (¿Por qué? Haga el Ejercicio 11).

**Ortogonalidad y autovectores.** Recuerde por último que si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $m$ , los autovectores de  $A^T$  asociados a un autovalor  $\sigma$  son perpendiculares a todos los autovectores y autovectores generalizados de  $A$  asociados a otro autovalor  $\mu$ . Esta afirmación es fácil de probar: Si  $A^T w = \sigma w$ , y  $v$  es autovector generalizado de  $A$  asociado a otro autovalor  $\mu \neq \sigma$ , esto es,  $(A - \mu I)^k v = 0$ , tenemos entonces que

$$(A - \mu I)^k v = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = w^T (A - \mu I)^k v = (w^T (A - \mu I)^k) v = (\sigma - \mu)^k w^T v,$$

y como  $\sigma \neq \mu$ , deducimos que por fuerza debe ser  $w^T v = 0$ .

Como consecuencia de lo anterior si  $\lambda$  es autovalor *simple* de  $A$  y  $w$  y  $v$  son autovectores no nulos de  $A^T$  y de  $A$  respectivamente, asociados ambos al autovalor  $\lambda$ , entonces  $w^T v \neq 0$  (¿Por qué?).

## 5.2 Teoría básica de bifurcaciones

### 5.2.1 Preliminares

Como en secciones anteriores, en lo que sigue  $f$  es una aplicación  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Recordamos en esta sección los posibles escenarios que nos podemos encontrar (al menos los más comunes) cuando en una rama de equilibrios  $f(u, \lambda) = 0$  uno de los autovalores de  $f_u$  tiene parte real nula. En el caso en que dicho autovalor sea real, se tendrá que el determinante de  $f_u$  será nulo.

En lo que sigue, supondremos pues que parametrizando dicha rama de equilibrios por su longitud de arco  $s$ , para  $s = s_0$  uno de los autovalores de  $f_u(u(s_0), \lambda(s_0))$  es nulo. También en lo que sigue, salvo que especifiquemos lo contrario, siempre estaremos evaluando  $f$  y sus derivadas en  $(u(s), \lambda(s))$ , por lo que evitaremos especificar de manera explícita esta dependencia, y así, escribiremos

$$f_u, f_\lambda, f_{u\lambda}, \text{ etc},$$

en vez de  $f_u(u(s), \lambda(s))$ ,  $f_\lambda(u(s), \lambda(s))$ , etc. Cuando sea necesario resaltar que evaluamos  $f$  y sus derivadas en  $(u(s_0), \lambda(s_0))$ , escribiremos

$$f_u^0, f_\lambda^0, f_{u\lambda}^0, \text{ etc},$$

en vez de  $f_u(u(s), \lambda(s))$ ,  $f_\lambda(u(s_0), \lambda(s_0))$ , etc, aunque frecuentemente omitiremos incluso el superíndice 0 cuando ello no de lugar a confusión.

Observamos que al haber un sólo autovalor de  $f_u$  que se anula en  $s = s_0$ , el rango de  $f_u^0$  es  $m - 1$ .

En lo que sigue también denotaremos por  $w$  y  $v$  vectores unitarios de  $\text{Nul}((f_u^0)^T)$  y de  $f_u^0$ , respectivamente, esto es

$$w^T f_u^0 = 0^T, \quad f_u v = 0, \quad \text{junto con} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Dado que el rango de  $f_u^0$  es  $m - 1$ , tenemos que

$$\text{Nul}(f_u^0) = \text{lin}(v), \quad \text{Nul}((f_u^0)^T) = \text{lin}(w),$$

(en estas notas,  $\text{lin}$  denota espacio generado). En otras palabras  $v$  y  $w$  son bases de  $\text{Nul}(f_u^0)$  y de  $\text{Nul}((f_u^0)^T)$ . Observe que tal y como hemos recordado antes  $w$  es perpendicular al espacio columna de  $f_u$ . En particular tendremos

$$f_\lambda^0 \in \text{col}(f_u^0) \quad \Leftrightarrow \quad w^T f_\lambda^0 = 0 \quad (20)$$

Distinguimos dos casos según  $f_\lambda^0$  esté o no en el espacio imagen o columna de  $f_u^0$

### 5.2.2 Caso de $f_\lambda \notin \text{col}(f_u)$

Estudiamos a continuación el caso en que

$$w^T f_\lambda \neq 0. \quad (21)$$

Nótese que la diferencial de  $f$  respecto de  $u$  y  $\lambda$

$$[f_u, f_\lambda]$$

en  $s = s_0$  tiene rango máximo, pues al ser  $\text{Nul}(f_u^0) = \text{lin}(v)$  se tiene que el rango de  $f_u^0$  es  $m - 1$ . Luego hay  $m - 1$  columnas linealmente independientes en  $f_u^0$ . Pero al ser  $f_\lambda^0 \notin \text{col}(f_u^0)$ , no se puede expresar  $f_\lambda^0$  como combinación lineal de las  $m - 1$  columnas independientes de  $f_u^0$  y, por tanto, éstas y  $f_\lambda^0$  son  $m$  vectores linealmente independientes. Tenemos entonces que, efectivamente,

$$\text{rg}([f_u, f_\lambda]) = m.$$

El teorema de la función implícita nos garantiza entonces que las soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  en un entorno de  $(u(s_0), \lambda(s_0))$  son una curva ( $m - 1$  componentes de  $u$  y  $\lambda$  parametrizables en términos de la restante componente de  $u$ ) que debe ser por tanto la curva  $(u(s), \lambda(s))$  que veníamos considerando. Curva que no tendremos problema en calcular con la técnica de la pseudo longitud de arco de Keller, como mostramos al final de esta sección.

Veamos ahora cómo es dicha curva o rama de equilibrios en un entorno de  $(u(s_0), \lambda(s_0))$ . Derivando respecto de  $s$  en la igualdad  $f(u(s), \lambda(s)) = 0$  tenemos que

$$f_u \dot{u} + f_\lambda \dot{\lambda} = 0, \quad (22)$$

donde, aquí y en lo que sigue, el punto  $\dot{\phantom{x}}$  significa la derivada con respecto a la longitud de arco,  $d/ds$ . En particular para  $s = s_0$

$$f_u^0 \dot{u}^0 + f_\lambda^0 \dot{\lambda}^0 = 0 \quad (23)$$

que implica

$$\underbrace{w^T f_u^0}_{=0} \dot{u}^0 + w^T f_\lambda^0 \dot{\lambda}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{w^T f_\lambda^0}_{\neq 0} \dot{\lambda}^0 = 0$$

de donde sacamos que

$$\dot{\lambda}^0 = 0. \quad (24)$$

o en otras palabras,  $\lambda$  tiene un punto crítico en  $s = s_0$  (un máximo, un mínimo o un punto de inflexión). Llevando este resultado a (23) tenemos  $f_u^0 \dot{u}^0 = 0$ , que implica que  $\dot{u}^0$  está en el espacio nulo de  $f_u^0$ , y por tanto debe ser proporcional a  $v$ . Al ser unitarios ambos vectores tenemos que

$$\dot{u}^0 = \pm v. \quad (25)$$

Derivando respecto de  $s$  en (22) obtenemos

$$f_{uu}(\dot{u}, \dot{u}) + 2\dot{\lambda} f_{u\lambda} \dot{u} + \dot{\lambda}^2 f_{\lambda\lambda} + f_u \ddot{u} + f_\lambda(\ddot{\lambda}) = 0,$$

donde, para cada  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $f_{uu}(x, y)$  es un vector de  $m$  componentes que vienen dadas por

$$(f_{uu}(x, y))_k = x^T f_{uu}^{(k)} y, \quad k = 1, \dots, m, \quad (26)$$

siendo, obviamente,  $f_{uu}^{(k)}$  la matriz hessiana de la  $k$ -ésima componente  $f^{(k)}$  de  $f$ . Dado que, como hemos visto en (24)  $\dot{\lambda}^0 = 0$ ,  $\dot{u}^0 = \pm v$ , y  $w^T f_u^0 = 0$ , al evaluar (26) en  $s = s_0$  y tomar producto escalar con  $w$  obtenemos

$$w^T f_{uu}^0(v, v) + \ddot{\lambda}^0 (w^T f_\lambda^0) = 0,$$

de donde se sigue que

$$\ddot{\lambda}^0 = -\frac{w^T f_{uu}^0(v, v)}{w^T f_\lambda^0}. \quad (27)$$

No es esperable en general que el numerador se nulo. Esto es, en general tendremos un máximo o un mínimo en  $\lambda$ , esto es, *un pliegue*, o punto límite ("fold" o "limit point" en la literatura inglesa).

Veamos ahora si el autovalor que se hace cero en  $(u(s_0), \lambda(s_0))$  cambia de signo. Llamemos a dicho autovalor  $\sigma$ , y de sus autovectores asociados, seleccionemos aquel vector  $y$  para el que  $v^T y = 0$ . Tendremos entonces que, a lo largo de la rama de equilibrios  $(u(s), \lambda(s))$ ,  $y$  y  $\sigma$  satisfacen que

$$\begin{aligned} f_u y - \sigma y &= 0, \\ v^T y &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Notemos que, en particular, para  $s = s_0$  se tiene que

$$y^0 = v, \quad \sigma^0 = 0. \quad (29)$$

Derivando respecto de  $s$  en (28) tenemos que

$$f_{uu}(\dot{u}, y) + f_u \dot{y} + \dot{\lambda} f_{u\lambda} y + \dot{\sigma} y + \sigma \dot{y} = 0,$$

$$v^T \dot{y} = 0.$$

Evaluable en  $s = 0$  y recordando que  $\dot{\lambda}^0 = 0$ ,  $\dot{u}^0 = \pm v$  (véanse fórmulas (24) y (25)) y aplicando (29) tenemos que

$$\pm f_{uu}^0(v, v) + f_u^0 \dot{y}^0 + \dot{\sigma}^0 v = 0,$$

$$v^T \dot{y}^0 = 0.$$

Multiplicando escalarmente la primera igualdad por  $w$  y recordando que  $w^T f_u^0 = 0$  tenemos que

$$\pm w^T f_{uu}^0(v, v) + \dot{\sigma}^0 w^T v = 0.$$

Dado que  $w^T v \neq 0$  (vuelva a leer el último párrafo de la Sección 5.1) tenemos que

$$\dot{\sigma} = \mp \frac{w^T f_{uu}^0(v, v)}{w^T v} = \ddot{\lambda} \frac{w^T f_{\lambda}^0}{w^T \dot{u}^0}.$$

Luego siempre que  $\ddot{\lambda}^0 \neq 0$  (que en particular implica que en  $s = s_0$ , el parámetro  $\lambda$  tiene o bien un máximo o bien un mínimo), el autovalor que se hace nulo en  $s = s_0$  cambia de signo (por tener derivada no nula).

Para terminar mostramos ahora que utilizando la técnica de la pseudo longitud de arco de Keller las ecuaciones que hay que resolver en cada punto son de jacobiano invertible (para incrementos  $\Delta s$  suficientemente pequeños). En efecto, notemos que de (22) deducimos que

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} \in \text{Nul}([f_u, f_{\lambda}]).$$

Si, además

$$\text{rg}([f_u, f_{\lambda}]) = m,$$

entonces

$$\text{Nul}([f_u, f_{\lambda}]) = \text{lin}(\mathbf{t}).$$

Denotando como es habitual

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix},$$

la matriz de dimensiones  $(m+1) \times (m+1)$

$$J = \begin{bmatrix} f_u & f_{\lambda} \\ t^T & \tau \end{bmatrix},$$

como probamos a continuación, tiene rango máximo. En efecto si planteando encontrar los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \text{Nul}(J)$$

como solución del sistema  $J\mathbf{x} = 0$ , deberá satisfacerse

$$\begin{aligned} f_u x + \xi f_{\lambda} &= 0, \\ t^T x + \tau \xi &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

De la primera ecuación obtenemos que  $\mathbf{x} \in \text{Nul}([f_u, f_{\lambda}])$ , y por tanto  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{t}$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pero la segunda ecuación es entonces

$$0 = t^T x + \tau \xi = t^T(\alpha t) + \tau(\alpha \tau) = \alpha \|\mathbf{t}\|^2 = \alpha.$$

De donde deducimos que

$$\text{Nul}([f_u, f_\lambda]) = \{\mathbf{0}\}.$$

En la técnica de la pseudolongitud de arco, la función de la que hay que encontrar un cero para calcular un nuevo punto en la curva  $f(u, \lambda) = 0$  es

$$F(u, \lambda) = \begin{bmatrix} f(u, \lambda) \\ t_r^T(u - u_r) + \tau_r(\lambda - \lambda_r) - \Delta s \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} u_r \\ \lambda_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_r = \begin{bmatrix} t_r \\ \tau_r \end{bmatrix},$$

son, respectivamente, el punto y la tangente de referencia (típicamente los últimos calculados). La matriz jacobiana de la función  $F$  es

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} f_u & f_\lambda \\ t_r^T & \tau_r \end{bmatrix}.$$

Si buscamos los vectores  $\mathbf{x}$  de su espacio nulo repitiendo lo hecho anteriormente con la matriz  $J$ , concluiremos que  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{t}$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$  y que  $0 = \alpha(\mathbf{t}_r^T \mathbf{t})$ . Bastará pues con que  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_r$  no sean ortogonales para que el espacio nulo de  $\tilde{J}$  se reduzca al vector nulo y, por tanto,  $\tilde{J}$  sea invertible. Como bien sabemos, en tal caso, el método de Newton convergerá (cuadráticamente, además) para iterantes iniciales suficientemente cercanos al cero. Dichos iterantes cercanos al cero y vectores  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_r$  casi paralelos se garantiza con  $\Delta s$  suficientemente pequeño.

### 5.2.3 Caso $f_\lambda \in \text{col}(f_u)$

Estudiamos a continuación el caso en que

$$w^T f_\lambda^0 = 0, \tag{31}$$

y, por tanto,  $f_\lambda^0 \in \text{col}(f_u^0)$ . Nótese que en este caso, para la diferencial de  $f$  respecto de  $u$  y  $\lambda$   $[f_u, f_\lambda]$ , en  $s = s_0$  se tiene que

$$w^T [f_u^0, f_\lambda^0] = 0, \tag{32}$$

y como al ser  $\text{Nul}(f_u^0) = \text{lin}(v)$  y, por tanto de dimensión 1, se tiene que  $f_u^0$  tiene rango  $m - 1$ , de lo que se sigue que

$$\text{rg}([f_u^0, f_\lambda^0]) = m - 1.$$

Es entonces inmediato comprobar que

$$\text{Nul}([f_u^0, f_\lambda^0]) = \text{lin}(\{\mathbf{v}, \mathbf{t}\}), \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \text{con } \tau \neq 0 \tag{33}$$

Dedicamos lo que viene a continuación a razonar que, en condiciones muy genéricas, en  $(u^0, \lambda^0)$  se cruzan dos ramas de equilibrios. Para ellos planteamos la reducción de Liapunov-Schmidt siguiente. Consideramos  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2}$  dada por

$$G(\alpha, \beta, y, \gamma, \delta) = \begin{bmatrix} f(u^0 + \alpha t + \beta v + y, \lambda^0 + \alpha \tau + \gamma) - \delta w \\ t^T y + \tau \gamma \\ v^T y \end{bmatrix},$$

que, denotando

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ \gamma \end{bmatrix},$$

abreviaremos como

$$G(\alpha, \beta, \mathbf{y}, \delta) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{u}^0 + \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{v} + \mathbf{y}) - \delta w \\ \mathbf{t}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{y} \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$G(0, 0, \mathbf{0}, 0) = \begin{bmatrix} f(u^0, \lambda^0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Por otro lado la diferencial  $G_{y,\gamma,\delta}$  en  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$  e  $y = 0$  es

$$G_{y,\gamma,\delta} = \begin{bmatrix} f_u^0 & f_\lambda^0 & w \\ t^T & \tau & 0 \\ v^T & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veamos que esta matriz, que tiene dimensiones  $(m+2) \times (m+2)$  tiene rango  $m+2$ . Para ello buscamos vectores

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \nu \end{bmatrix} \in \text{Nul}(G_{y,\gamma,\delta}),$$

como solución del sistema

$$\begin{aligned} f_u^0 x + \xi f_\lambda^0 + \nu w &= 0, \\ t^T x + \tau \xi &= 0, \\ v^T x &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Multiplicando escalarmente la primera ecuación por  $w$  y recordando (32) tenemos que

$$\left. \begin{aligned} w^T f_u^0 x + \xi w^T f_\lambda^0 + \nu w^T w &= 0, \\ w^T f_u^0 &= 0, \quad w^T f_\lambda^0 = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu = 0.$$

con lo que la primera ecuación es en realidad

$$f_u^0 x + \xi f_\lambda^0 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \text{Nul}([f_u^0, f_\lambda^0]) = \text{lin}\left(\left\{ \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\right),$$

esto es

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix},$$

para ciertos  $\kappa, \theta \in \mathbb{R}$ . Pero de las dos últimas ecuaciones de (35) nos indican que  $\mathbf{x}$  es ortogonal a  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{v}$ , con lo que deben ser  $\kappa = \theta = 0$ . Tenemos pues que  $\text{Nul}(G_{y,\gamma,\delta})$  se reduce al vector nulo y la matriz  $G_{y,\gamma,\delta}$  es invertible.

De (34) y de que  $G_{y,\gamma,\delta}$  tenga rango máximo, aplicando el teorema de la función implícita deducimos que existen funciones  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\alpha, \beta)$  y  $\delta = \delta(\alpha, \beta)$ , definidas en un entorno de  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$  tales que

$$\mathbf{y}(0, 0) = \mathbf{0}, \quad \delta(0, 0) = 0, \quad (36)$$



y

$$G(\alpha, \beta, \mathbf{y}(\alpha, \beta), \delta(\alpha, \beta)) = 0,$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{u}^0 + \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{v} + \mathbf{y}(\alpha, \beta)) - \delta(\alpha, \beta)w \\ \mathbf{t}^T \mathbf{y}(\alpha, \beta) \\ \mathbf{v}^T \mathbf{y}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Denotemos, como es frecuente en la literatura,

$$g(\alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta).$$

Observemos que las soluciones de

$$g(\alpha, \beta) = 0, \quad (38)$$

se corresponden, por medio de la función  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\alpha, \beta)$  y de la relación (37), con las soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  en un entorno de  $(u_0, \lambda_0)$ . Estudiando la función  $g$  conseguiremos describir el conjunto de soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  en un entorno de  $(u_0, \lambda_0)$ . Este estudio consistirá en calcular su desarrollo de Taylor.

Procederemos por tanto a tomar derivadas parciales con respecto de  $\alpha$  y  $\beta$  en la igualdad

$$f(\mathbf{u}^0 + \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{v} + \mathbf{y}(\alpha, \beta)) - g(\alpha, \beta)w = 0. \quad (39)$$

Así, derivando respecto de  $\alpha$  y  $\beta$  obtenemos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{u}}(\mathbf{t} + \mathbf{y}_{\alpha}) + g_{\alpha}w &= 0, \\ f_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{y}_{\beta}) + g_{\beta}w &= 0, \end{aligned}$$

que evaluando en  $\alpha = \beta = 0$  y recordando que

$$f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{t} = f_u^0 t + \tau f_{\lambda}^0 = 0, \quad f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{v} = f_u^0 v = 0,$$

da lugar a

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_{\alpha} + g_{\alpha}w &= 0, \\ f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_{\beta} + g_{\beta}w &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Tomando producto escalar con  $w$  obtenemos

$$\begin{aligned} w^T f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_{\alpha} + g_{\alpha}(w^T w) &= 0, \\ w^T f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_{\beta} + g_{\beta}(w^T w) &= 0. \end{aligned}$$

y recordando que

$$w^T f_{\mathbf{u}} = w^T [f_u^0, f_{\lambda}^0] = 0,$$

(recuerde (32)) tenemos que en  $\alpha = \beta = 0$

$$g_{\alpha} = g_{\beta} = 0. \quad (41)$$

Esto implica que (40) es, en realidad,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_\alpha &= 0, \\ f_{\mathbf{u}}^0 \mathbf{y}_\beta &= 0. \end{aligned}$$

Esto es,  $\mathbf{y}_\alpha, \mathbf{y}_\beta \in \text{Nul}(f_{\mathbf{u}}^0)$ , que, recordemos, está generado por  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{v}$ . Pero derivando con respecto de  $\alpha$  y  $\beta$  en (37) obtenemos que  $\mathbf{y}_\alpha$  e  $\mathbf{y}_\beta$  son, a su vez, ortogonales a  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{v}$ . De donde se deduce que

$$\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{y}_\beta = 0. \quad (42)$$

Derivando dos veces respecto de  $\alpha$  y  $\beta$  en (39) obtenemos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t} + \mathbf{y}_\alpha, \mathbf{t} + \mathbf{y}_\alpha) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\alpha\alpha} + g_{\alpha\alpha} w &= 0, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t} + \mathbf{y}_\alpha, \mathbf{v} + \mathbf{y}_\beta) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} w &= 0, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{v} + \mathbf{y}_\beta, \mathbf{v} + \mathbf{y}_\beta) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\beta\beta} + g_{\beta\beta} w &= 0, \end{aligned}$$

que evaluando en  $\alpha = \beta = 0$  y recordando (42) da lugar a

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\alpha\alpha} + g_{\alpha\alpha} w &= 0, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} w &= 0, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + f_{\mathbf{u}} \mathbf{y}_{\beta\beta} + g_{\beta\beta} w &= 0. \end{aligned}$$

Tomando producto escalar con  $w$  (y recordando que  $w^T f_{\mathbf{u}} = 0$  y que  $w^T w = 1$ ) obtenemos que, en  $\alpha = \beta = 0$ ,

$$\begin{aligned} w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) + g_{\alpha\alpha} &= 0, \\ w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}) + g_{\alpha\beta} &= 0, \\ w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + g_{\beta\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

No pierda de vista, no obstante, que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) &= f_{uu}(t, t) + 2\tau f_{u\lambda} t + \tau^2 f_{\lambda\lambda}, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}) &= f_{uu}(t, v) + \tau f_{u\lambda} v, \\ f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= f_{uu}(v, v). \end{aligned}$$

Nótese también que derivando dos veces respecto de  $s$  en  $f(u(s), \lambda(s)) = 0$  obtenemos que

$$f_{uu}(\dot{u}, \dot{u}) + 2\dot{\lambda} f_{u\lambda} \dot{u} + \dot{\lambda}^2 f_{\lambda\lambda} + f_u \ddot{u} + \ddot{\lambda} f_\lambda = 0,$$

que tomando producto escalar con  $w$  y evaluando en  $s = s_0$ , y recordando que  $w^T f_u^0 = 0$  y  $w^T f_\lambda^0 = 0$ , y que  $\dot{u}(s_0) = t$  y  $\dot{\lambda}(s_0) = \tau$  da lugar a

$$0 = w^T (f_{uu}(t, t) + 2\tau f_{u\lambda} t + \tau^2 f_{\lambda\lambda}) = w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}).$$

Tenemos que por tanto, que la función  $g(\alpha, \beta)$ , cuyos ceros se corresponden con las soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  en un entorno de  $(u^0, \lambda^0)$  es de la forma

$$g(\alpha, \beta) = c_{12} \alpha \beta + \frac{c_{22}}{2} \beta^2 + \text{términos de orden superior}, \quad (44)$$

donde

$$c_{12} = -w^T f_{uu}(t, v) - \tau w^T f_{u\lambda} v = -w^T f_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}), \quad c_{22} = -w^T f_{uu}(v, v) = -w^T f_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (45)$$

valores que, en general, serán no nulos. Para hacernos idea de cómo son las soluciones de  $g(\alpha, \beta) = 0$ , igualamos a cero, los primeros términos del desarrollo de Taylor,

$$2c_{12}\alpha\beta + c_{22}\beta^2 = 0,$$

ecuación ésta conocida como ecuación algebraica de bifurcación. Una de sus soluciones es

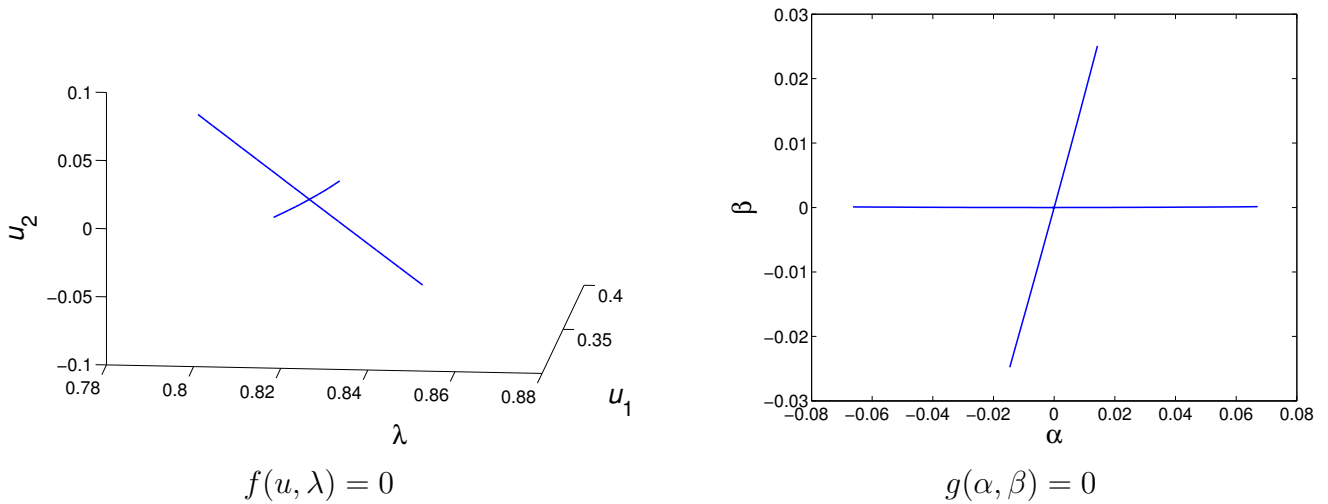
$$\beta = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

que se corresponde con la solución  $(u(s), \lambda(s))$  de  $f(u, \lambda) = 0$  de la que hemos partido. Otra solución es la recta de ecuación

$$2c_{12}\alpha + c_{22}\beta = 0. \quad (46)$$

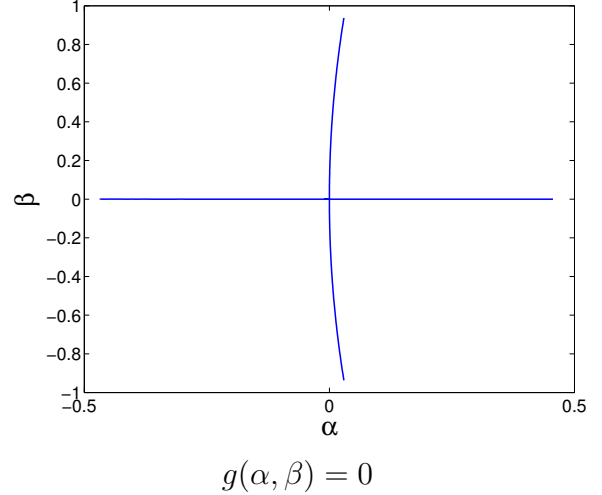
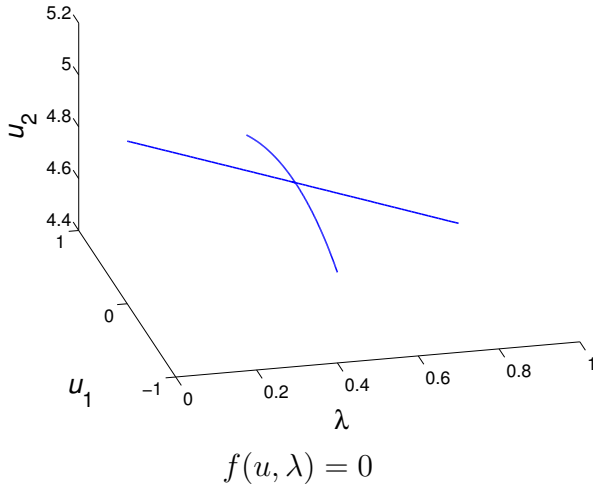
que se corresponderá con otra rama de soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  distinta de la rama de la que hemos partido.

**Ejemplo 1 (continuación).** En la p. 16 vimos que en la rama de equilibrios que habíamos calculado un autovalor pasaba de positivo a negativo cerca de  $\lambda = 0.83$ . De hecho es en  $\lambda_0 = 0.822988\dots$ . En este caso, además,  $\lambda$  es creciente a lo largo de la rama. Esto es, se tiene un punto donde  $f_u t + \tau f_\lambda = 0$  con  $\tau \neq 0$ , con lo que  $f_\lambda \in \text{col}(f_u)$ , y para dicho punto además se tiene que, como un autovalor cambia de signo, el correspondiente autovector satisface  $f_u v = 0$ . Según lo que acabamos de ver, en dicho punto hay un cruce de ramas. En las gráficas que mostramos a continuación podemos ver dicho cruce de ramas, así como el conjunto  $g(\alpha, \beta) = 0$  en el plano  $\alpha\beta$ . Nótese como una de las ramas es paralela en el punto de cruce al eje  $\beta = 0$ . De hecho es prácticamente coincidente con dicho eje.



**Ejemplo 2 (continuación).** En lo visto en este ejemplo en la p. 15 el único cambio de signo corresponde a un pliegue. Sin embargo, si tomamos  $\mu = 1/\cos(7\pi/16)$ , en  $\lambda_0 = 0.41574\dots$ , un

autovalor pasa de ser negativo para  $\lambda < \lambda_0$  a positivo para  $\lambda > \lambda_0$ . Como la rama de soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  toma valores a ambos lados de  $\lambda_0$ , se tiene  $f_u t + \tau f_\lambda = 0$  con  $\tau \neq 0$ , con lo que  $f_\lambda \in \text{col}(f_u)$ , y para  $\lambda = \lambda_0$ , además se tiene que, como un autovalor cambia de signo, el correspondiente autovector satisface  $f_u v = 0$ . Según lo que acabamos de ver, en dicho punto hay un cruce de ramas. Mostramos a continuación dicho cruce, así como el conjunto  $g(\alpha, \beta) = 0$ .



En est caso se tiene que el coeficiente  $c_{22}$  es cero (algo que no es genérico en sistemas de un parámetro, salvo que  $f$  sea especial en algún sentido). El resultado es que las curvas  $g(\alpha, \beta) = 0$  son en el origen tangentes a las rectas  $\beta = 0$  y  $\alpha = 0$ .

---

Comprobemos por último que, como hicimos en el caso del pliegue el autovalor que se hace cero en  $(u(s_0), \lambda(s_0))$  cambia de signo, pero que esto ocurre a lo largo de las dos ramas que se cruzan en  $(u(s_0), \lambda(s_0))$  si  $c_{22} \neq 0$ . Planteamos entonces que se satisfaga que

$$\begin{aligned} f_u x - \sigma x &= 0, \\ v^T x &= 0, \end{aligned} \tag{47}$$

donde  $f_u$  esta evaluada en  $\mathbf{u}_0 + \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{v} + \mathbf{y}(\alpha, \beta)$ . Al igual que hicimos en el caso del pliegue, es inmediato comprobar que la diferencial con respecto de  $x$  y  $\sigma$  es invertible, con lo que, en virtud del teorema de la función implícita, podemos expresar  $x$  y  $\sigma$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$ . Tomando derivadas parciales con respecto a  $\alpha$  y  $\beta$  en (47), evaluando en  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , multiplicando escalarmante por  $w$  y recordando (42), y que, para  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , tenemos que  $x = v$ ,  $\sigma = 0$ , y que  $w^T[f_u, f_\lambda] = 0$  llegamos a que

$$\begin{aligned} w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}\mathbf{v}) + \sigma_\alpha(w^T v) &= 0, \\ w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{v}\mathbf{v}) + \sigma_\beta(w^T v) &= 0. \end{aligned}$$

Estas igualdades, recordando (45) podemos escribirlas como

$$\begin{aligned} -c_{12} + \sigma_{\alpha}(w^T v) &= 0, \\ -c_{22} + \sigma_{\beta}(w^T v) &= 0. \end{aligned}$$

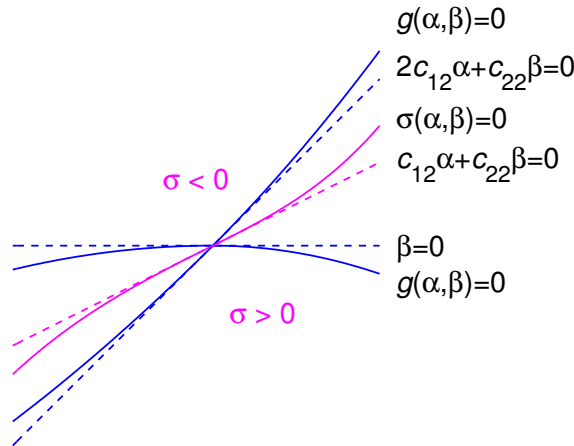
Por tanto tenemos que

$$\sigma(\alpha, \beta) = \frac{c_{12}}{w^T v} \alpha + \frac{c_{22}}{w^T v} \beta + \text{términos de orden superior.}$$

Tememos pues que la curva  $\sigma = 0$  es paralela en  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$  a la recta

$$c_{12}\alpha + c_{22}\beta = 0,$$

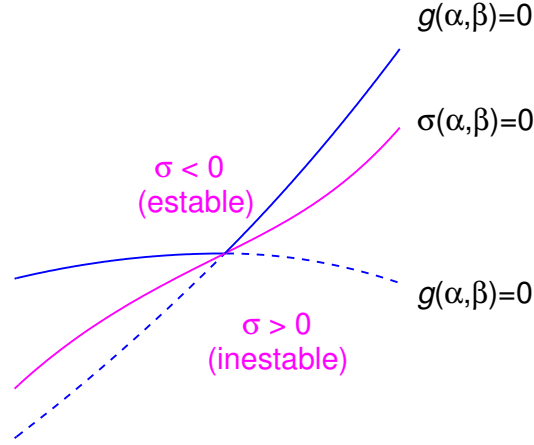
Esta recta separa al plano  $\alpha\beta$  en dos mitades, correspondientes a  $\sigma > 0$  y  $\sigma < 0$ . Observemos así mismo que, si  $c_{22} \neq 0$ , esta recta tiene pendiente la mitad que la la recta (46), correspondiente a la rama de soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  que no es paralela a  $\mathbf{t}$ . La situación (en el plano  $\alpha\beta$ ) de ambas ramas y de  $\sigma = 0$  es como indicamos en le siguiente gráfico



Caso  $c_{22} \neq 0$ .

donde, junto con las dos curvas  $g(\alpha, \beta) = 0$  (en azul) y la curva  $\sigma = 0$  (en morado), mostramos (en trazo discontinuo) las rectas a las que dichas curvas son paralelas en el origen. Puesto que la recta  $\sigma = 0$  está entre las dos curvas  $g(\alpha, \beta) = 0$ , cada mitad de cada una de estas curvas está en un plano  $\sigma > 0$  o  $\sigma < 0$  diferente, por lo que el autovalor cambia de signo en cada una de las ramas al pasar por  $(u^0, \lambda^0)$  y, además, en cada rama tiene signo diferente. Por eso en un punto de ramificación donde  $c_{22} \neq 0$  se dice que hay un *intercambio de estabilidad*, como indicamos en el siguiente esquema, donde las soluciones estables se representan en trazo continuo y las inestables

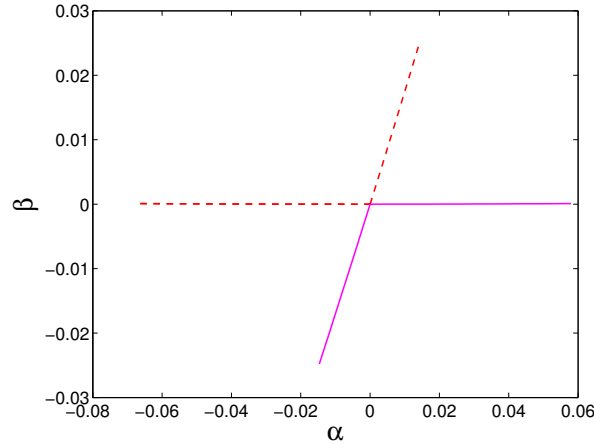
en trazo discontinuo.



Caso  $c_{22} \neq 0$ . Intercambio de estabilidad (bifurcación transcítica).

Tenemos pues que si  $c_{22} \neq 0$ , entonces el punto de ramificación es corresponde a una *bifurcación transcítica*.

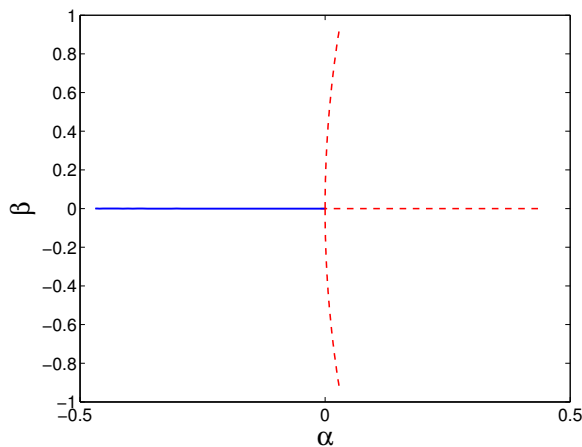
**Ejemplo 1 (continuación).** Ya hemos visto en esta misma sección que, por la forma en que se cruzan las dos ramas en  $\lambda_0 = 0.822988\dots$ , (no hay rama paralela en el origen a la recta  $\alpha = 0$  en las soluciones de  $g(\alpha, \beta) = 0$ ) tiene que ocurrir que  $c_{22} \neq 0$  con lo que se trata de un intercambio de estabilidad. En la figura que mostramos a continuación, marcados en rojo y con trazo discontinuo los soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  con dos autovalores de parte real positiva, y en morado y trazo continuo, las que tienen uno positivo y otro negativo.



Ramas con dos autovalores positivos (rojo y discontinuo)  
y uno positivo y otro negativo (morado, continuo).

**Ejemplo 2 (continuación).** En este caso ya hemos comentado que para  $\lambda_0 = 0.41574\dots$  hay un punto de ramificación en el que  $c_{22} = 0$ . No se puede predecir la estabilidad de la rama que cruza en este caso. En la figura que mostramos a continuación, marcados en rojo y con trazo discontinuo

los soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$  con un autovalor positivo y otro negativo, y en azul y trazo continuo, las que tienen los dos autovalores negativos.



Ramas con dos autovalores negativos (azul y continuo)  
y uno positivo y otro negativo (rojo y discontinuo).

### 5.3 Bifurcaciones con rotura de simetría

Recibe en nombre de simetría de  $\mathbb{R}^m$  una aplicación lineal  $S$  de  $\mathbb{R}^m$  en si mismo que satisface

$$S^2 = I.$$

Esto implica que sus autovalores sólo pueden ser 1 o  $-1$  (¿Por qué?). Además el hecho de que  $S^2$  sea la identidad también implica que  $S$  diagonaliza (haga el Ejercicio 12).

Una función  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice equivariante por una simetría  $S$  si se verifica que

$$Sf(u, \lambda) = f(Su, \lambda), \quad (48)$$

para todo  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puesto que  $S$  es una aplicación lineal, y por tanto,  $S0 = 0$ , (48) en particular implica que si  $(u, \lambda)$  es solución de  $f(u, \lambda) = 0$ , también lo es  $(Su, \lambda)$ , esto es,

$$\left. \begin{array}{l} Sf(u, \lambda) = f(Su, \lambda), \\ S0 = 0, \\ f(u, \lambda) = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow f(Su, \lambda) = 0.$$

En otras palabras, si  $u$  es solución de  $f(u, \lambda) = 0$ , también lo es su simétrica  $Su$ .

**Ejemplo 2 (continuación)** Recordemos que en este ejemplo la función  $f(u, \lambda)$  es

$$f(u, \lambda) = g(u, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mu \left( \frac{u_1 + 1}{d_1} + \frac{u_1 - 1}{d_2} \right) - 2u_1 \\ \mu \left( \frac{u_2}{d_1} + \frac{u_2}{d_2} \right) - 2u_2 - \lambda \end{bmatrix}, \quad (49)$$

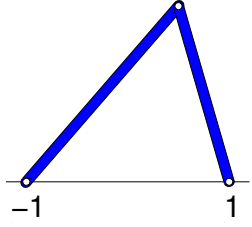
donde

$$d_1 = \sqrt{1 + 2u_1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad \text{y} \quad d_2 = \sqrt{1 - 2u_1 + u_1^2 + u_2^2}.$$

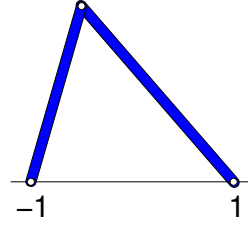
Esta función es equivariante por la simetría  $S$  dada por

$$Su = \begin{bmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

de la que mostramos a continuación su efecto en una configuración del pórtico (adimensionalizado) que venimos considerando



configuración correspondiente a  $u$



configuración correspondiente a  $Su$

Veamos que, en efecto,  $f$  es equivariante por  $S$ . Notemos que al evaluar  $f(Su, \lambda)$ , los valores  $d_1$  y  $d_2$  se intercambian entre sí. De esta manera tenemos

$$f(Su, \lambda) = \begin{bmatrix} \mu\left(\frac{-u_1 + 1}{d_2} + \frac{-u_1 - 1}{d_1}\right) + 2u_1 \\ \mu\left(\frac{u_2}{d_2} + \frac{u_2}{d_1}\right) - 2u_2 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\mu\left(\frac{u_1 - 1}{d_2} + \frac{u_1 + 1}{d_1}\right) - 2u_1\right) \\ \mu\left(\frac{u_2}{d_1} + \frac{u_2}{d_1}\right) - 2u_2 - \lambda \end{bmatrix} = Sf(u, \lambda).$$


---

En una simetría  $S$  tenemos los espacios invariantes (los autovectores asociados a 1 y  $-1$ )

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Sx = x\}, \quad V_- = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Sx = -x\}. \quad (50)$$

Estos espacios son invariantes por  $f_u$  pues cambiando  $u$  por  $u + \xi x$  (con  $\xi \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^m$ ) en (48), obtenemos

$$Sf(u + \xi x, \lambda) = f(S(u + \xi x), \lambda),$$

y derivando respecto de  $\xi$  y evaluando en  $\xi = 0$  obtenemos

$$Sf_u x = f_u Sx. \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (51)$$

(donde  $f_u$  está evaluado en  $(u, \lambda)$  en el miembro izquierdo y en  $(Su, \lambda)$  en el derecho) de modo que

$$\left. \begin{array}{l} u \in V_+ \\ x \in V_{\pm} \end{array} \right\} \Rightarrow Sf_u x = \pm f_u x,$$

luego si  $u \in V_+$  y  $x \in V_+$  se tiene que  $f_u x \in V_+$ , y si  $u \in V_+$  y  $x \in V_-$  se tiene que  $f_u x \in V_-$ .



Esto tiene consecuencias en el caso de tener una rama de equilibrios

$$(u(s), \lambda(s)), \quad \text{con } u(s) \in V_+.$$

. Osérvese que puesto que  $0 \in V_+$  derivando en

$$0 = f(u(s), \lambda(s)) = f(Su(s), \lambda(s)) = Sf(u(s), \lambda(s)),$$

se tiene que

$$0 = f_u \dot{u} + \dot{\lambda} f_\lambda = Sf_u \dot{u} + \dot{\lambda} Sf_\lambda. \quad (52)$$

Dado que

$$u(s) \in V_+ \Rightarrow \dot{u}(s) \in V_+ \Rightarrow f_u \dot{u}(s) \in V_+$$

tenemos entonces que aplicando este resultado en (52) obtenemos

$$f_u \dot{u} + \dot{\lambda} f_\lambda = f_u \dot{u} + \dot{\lambda} Sf_\lambda \Rightarrow \dot{\lambda} f_\lambda = \dot{\lambda} Sf_\lambda,$$

y por tanto,

$$\dot{\lambda} \neq 0 \Rightarrow f_\lambda \in V_+. \quad (53)$$

Supongamos que ahora tenemos que en  $s = s_0$  hay un autovalor simple que cambia de signo y tal que su autovector unitario  $v$  asociado verifica que

$$v \in V_-.$$

Esto en particular implica que el vector  $w$  para el que  $f_u^T w = 0$ , al ser ortogonal al resto de los autovectores verifica que

$$w^T x = 0, \quad \forall x \in V_+,$$

y, en particular, si  $\dot{\lambda} \neq 0$ ,

$$w^T f_\lambda = 0. \quad (54)$$

Como consecuencia tenemos que siempre que  $c_{12} = -w^T f_{\mathbf{uu}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \neq 0$  tendremos un punto de ramificación en  $(u^0, \lambda^0)$ . Veamos que además dicho punto de ramificación corresponden a un pitchfork<sup>2</sup>. Para ello recordemos que en la igualdad (51)  $f_u$  está evaluada en  $(u, \lambda)$  en el miembro derecho y en  $(Su, \lambda)$  en el izquierdo. Cambiando ahora en dicha igualdad  $u$  por  $u + \xi y$  (con  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ ), derivando con respecto de  $\xi$  y evaluando en  $\xi = 0$ , obtenemos

$$Sf_{uu}(x, y) = f_{uu}(Sx, Sy), \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$

donde  $f_{uu}$  está evaluado en  $(u, \lambda)$  en el miembro izquierdo y en  $(Su, \lambda)$  en el derecho. Puesto que en el punto de ramificación  $Su = u$  y  $Sv = -v$ , obtenemos que

$$Sf_{uu}(v, v) = f_{uu}(v, v) \Rightarrow f_{uu}(v, v) \in V_+ \Rightarrow c_{22} = -w^T f_{uu}(v, v) = 0.$$

De la misma manera se prueba que  $w^T f_{\mathbf{uuu}}(\mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . Se puede concluir (aunque no haremos aquí los detalles) que siempre que  $c_{33} = (w^T f_{\mathbf{uuu}}(v, v, v)) \neq 0$  se tiene que el punto de bifurcación corresponde a un pitchfork.

---

<sup>2</sup>Mantenemos la nomenclatura en inglés, tal y como se hace en la comunidad científica española.

## 6 Rudimentos de cálculo de puntos de bifurcación

### 6.1 Detección de puntos de bifurcación

Aunque en un punto de bifurcación hay un autovalor de parte real nula o que cambia de signo, es posible detectar (algunas) bifurcaciones sin necesidad de recurrir al cálculo de autovalores. Esto tiene mayor interés en el caso de sistemas de dimensión grande donde el cálculo de todos los autovalores puede ser notoriamente más costoso que la obtención de los puntos en la rama de equilibrios. Comentamos a continuación algunos procedimientos para detectar puntos de bifurcación sin necesidad de recurrir al cálculo de autovalores.

Obviamente, los pliegues ocurren un cambio de signo de la última componente  $\tau$  de la tangente  $\mathbf{t} = [t^T, \tau]^T$ . Luego observando tales cambios de signo podemos detectar los pliegues.

En los puntos de ramificación, tal y como probamos más adelante, el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} f_u & f_\lambda \\ t^T & \tau \end{bmatrix}.$$

cambia de signo. En el método de Newton para encontrar los diversos equilibrios (y también al calcular la tangente en cada punto) resolvemos sistemas con la matriz

$$J = \begin{bmatrix} f_u & f_\lambda \\ t_a^T & \tau_a \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{t}_a = [t_a^T, \tau_a]^T$  es la tangente a la rama de equilibrios en el punto anterior. Para esta segunda matriz también es posible probar que el determinante cambia de signo en un punto de ramificación.

Para las bifurcaciones de Hopf, es posible también evaluar una función que cambie de signo en tales puntos de bifurcación (ver por ejemplo, [2, S 4.5]), aunque su costo computacional es dudoso que compense frente al cálculo de autovalores. Por lo que en el sistema (9) se hace inevitable el cálculo de autovalores si se quieren detectar todos los puntos de bifurcación.

### 6.2 Puntos de bifurcación

En multitud de situaciones prácticas interesa conocer con cierta exactitud el valor exacto del parámetro correspondiente a un punto de bifurcación. Los casos más sencillos, el pliegue y la bifurcación de Hopf (de la que no hemos comentado gran cosa en la sección anterior) son también los más sencillos de calcular.

#### 6.2.1 Bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf se puede calcular buscando el punto  $(u, \lambda)$ , para el que la parte real  $\sigma$  de un autovalor se anula. Esto se puede hacer, por ejemplo, con el método de la secante o con el método de bisección. Note que, dado  $\lambda$ , para calcular  $\sigma = \sigma(\lambda)$  es necesario

- 1) Calcular la solución  $u$  de  $f(u, \lambda) = 0$ .
- 2) Calcular los autovalores de  $f_u$  en el punto recién calculado o, al menos, los de parte real más pequeña.

3) Encontrar el de parte real más pequeña.

**Nota 3** Las rutinas de pseudolongitud de arco se pueden aprovechar para el paso 1) del procedimiento anterior. Para ello notemos que si, dado  $\lambda^*$ , queremos la solución  $u$  de  $f(u, \lambda^*) = 0$ , podemos tomar un punto de referencia  $(u_r, \lambda_r)$  cercano, y encontrar la solución  $(u, \lambda)$  del sistema

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) &= 0, \\ t_0(u - u_r) + \tau_0(\lambda - \lambda_r) &= \delta, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \text{y} \quad \delta = \lambda^* - \lambda_r.$$

**Ejemplo 1 (continuación).** Partiendo de las soluciones correspondientes a  $\lambda = 0.6723$  (todos los autovalores con parte real negativa) y  $\lambda = 0.6739$  (los dos autovalores con parte real positiva) aplicamos el procedimiento antes descrito con tolerancia igual a 10 veces la precisión de MATLAB (comando `eps`) y con una tolerancia para el método de la secante 10 veces mayor. En cuatro iteraciones del método de la secante obtenemos que la bifurcación de Hopf se produce en 0.67273681315910, valor para el cual los autovalores de  $f_u$  evaluado en la correspondiente solución de  $f(u, \lambda) = 0$  tiene parte real de módulo inferior a  $5.57 \times 10^{-16}$  (aproximadamente 2 veces la precisión de MATLAB). Repitiendo los cálculos con tolerancias 100 veces mayores que las anteriores, el valor de  $\lambda$  obtenido coincide con el anterior en todas las cifras decimales mostradas. La parte imaginaria de los autovalores, en ambos casos es  $\pm 0.60350803684924$  coincidiendo en ambos casos en las cifras decimales aquí mostradas.

## 6.2.2 Pliegues

Para localizar con precisión un pliegue podemos encontrar el punto en el que la última componente  $\tau$  de la tangente cambia de signo. Podemos utilizar el método de bisección o el método de la secante, pero, ahora,  $\lambda$  no puede ser la variable independiente. Podemos tomar como variable independiente la proyección sobre la tangente a la rama de equilibrios en un punto de referencia

$$x = \mathbf{t}_r \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_r).$$

Para una adecuada implementación del método de la secante, bisección o el que usemos para encontrar el cero de  $\tau$ , se deben mantener  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{t}_r$  inalterados durante todo el proceso. Para clarificar este hecho, describimos a continuación un paso del método de la secante, dados  $(x^{[n-1]}, \mathbf{u}^{[n-1]})$  y  $(x^{[n]}, \mathbf{u}^{[n]})$ , junto con los correspondientes valores  $\tau^{[n-1]}$  y  $\tau^{[n]}$ .

1) Determinar

$$x^{[n+1]} = x^{[n]} - \tau^{[n]} \frac{x^{[n]} - x^{[n-1]}}{\tau^{[n]} - \tau^{[n-1]}}.$$

2) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) &= 0, \\ t_r(u - u_r) + \tau_r(\lambda - \lambda_r) &= x^{[n+1]}. \end{aligned}$$

3) Calcular la tangente en el nuevo punto resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} f_u & f_\lambda \\ t_r^T & \tau_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y estableciendo} \quad \begin{bmatrix} t^{[n+1]} \\ \tau^{[n+1]} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\|x\|^2 + \xi^2}} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 1 (continuación)** Entre los valores  $\lambda = 1.550084$  y  $\lambda = 1.550223$  detectamos un cambio de signo en uno de los autovalores de  $f_u$  así como un cambio de signo en la última componente  $\tau$  de la tangente. Aplicando el método de la secante como lo hemos descrito en esta sección con punto de referencia el correspondiente a  $\lambda = 1.550084$ , tolerancia para el método de Newton igual a 10 veces la precisión de MATLAB ( $2^{-52}$ , o resultado del comando `eps`) y tolerancia para el método de la secante 100 veces mayor, obtenemos que el valor de  $\lambda^0$  donde se produce el pliegue es  $\lambda^0 = 1.55012079851043$  y el autovalor de menor módulo de  $f_u$  en dicho punto lo tiene inferior a  $2^{-52}$ . Repitiendo estos cálculos pero buscando el cero de dicho autovalor, reproducimos el valor de  $\lambda_0$  en todas las cifras decimales mostradas.

---

**Ejemplo2 (continuación)** Para  $mu = \sqrt{2}$  (barras en reposo a 45 grados con la horizontal), entre los valores  $\lambda = 0.26502$  y  $\lambda = 0.26490$  detectamos un cambio de signo en uno de los autovalores de  $f_u$  así como un cambio de signo en la última componente  $\tau$  de la tangente. Aplicando el método de la secante como lo hemos descrito en esta sección con punto de referencia el correspondiente a  $\lambda = 0.26502$ , tolerancia para el método de Newton igual a 10 veces la precisión de MATLAB ( $2^{-52}$ , o resultado del comando `eps`) y tolerancia para el método de la secante 100 veces mayor, obtenemos que el valor de  $\lambda^0$  donde se produce el pliegue es  $\lambda^0 = 0.265028253437410$  y el autovalor de menor módulo de  $f_u$  en dicho punto es exactamente 0. Repitiendo estos cálculos pero buscando el cero de dicho autovalor, reproducimos el valor de  $\lambda_0$  anterior.

---

### 6.2.3 Puntos de ramificación

El cálculo de puntos de ramificación es más problemático, ya que, como hemos comentado anteriormente, en ellos, la diferencial  $[f_u, f_\lambda]$  tiene rango  $m - 1$ . Un método para calcular una aproximación que, en general, no permite un cálculo preciso es el que seguidamente describimos. Llamamos la atención no obstante, sobre el hecho que, como comentaremos posteriormente, en general no es necesario un cálculo preciso del punto de ramificación para poder calcular puntos sobre la rama que cruza.

Para aproximar (que no calcular con precisión) un punto de ramificación podemos intentar encontrar el valor de  $\lambda$  para el cual el autovalor  $\sigma$  de  $f_u$  de módulo más pequeño se anula. Para ello

podemos aplicar el método de la secante o bisección o a dicho autovalor como función de  $\lambda$ . Un paso del método de la secante sería como a continuación describimos. Dados  $(\mathbf{u}^{[n-1]}, \lambda^{[n-1]})$  y  $(\mathbf{u}^{[n]}, \lambda^{[n]})$ , junto con los correspondientes valores  $\sigma^{[n-1]}$  y  $\sigma^{[n]}$ , del autovalor de  $f_u$  de módulo más pequeño, se debe proceder como sigue.

1) Determinar

$$\lambda^{[n+1]} = \lambda^{[n]} - \sigma^{[n]} \frac{\lambda^{[n]} - \lambda^{[n-1]}}{\sigma^{[n]} - \sigma^{[n-1]}}.$$

2) Resolver

$$f(u, \lambda^{[n+1]}) = 0, \quad (55)$$

3) Calcular el autovalor  $\sigma^{[n+1]}$  de  $f_u$  (evaluada en  $(u^{[n+1]}, \lambda^{[n+1]})$ ) de módulo más pequeño.

Tal y como comentamos anteriormente en la Nota 3 en la p. 35, es posible utilizar las rutinas y funciones utilizadas en la continuación de la pseudolongitud de arco de Keller para resolver (55).

Debemos notar que, dado que en punto de ramificación, denotémosle  $(u^0, \lambda^0)$ , tenemos que  $f_u^0$  tiene un autovalor nulo, para valores  $\lambda$  (suficientemente) cercanos a  $\lambda_0$ , por continuidad,  $f_u$  tendrá un autovalor de módulo cercano a cero, lo que dificulta (y en la práctica impide) la resolución de (55) cuando  $\lambda^{[n+1]}$  se acerca a  $\lambda^0$ .

**Ejemplo 1 (continuación)** Entre los valores  $\lambda = 0.8228$  y  $\lambda = 0.8245$  detectamos un cambio de signo en uno de los autovalores de  $f_u$ . Aplicamos el método de la secante como lo hemos descrito en esta sección tolerancia para el método de Newton igual a  $10^{-10}$  y tolerancia para el método de la secante 100 veces mayor, que son los valores con los que se han calculado los resultados mostrados en la continuación del Ejemplo 1 en la p. 27. Obtenemos que, tras 12 iteraciones del método de la secante, no conseguimos resolver el sistema (55). El valor de  $\lambda$  calculado es 0.82299, no pudiendo garantizarse más cifras decimales correctas que las aquí mostradas. El módulo del autovalor más pequeño de  $f_u$  en el correspondiente punto  $(u, \lambda)$  es inferior a  $2 \times 10^{-8}$ . El contraste con el caso del pliegue y de la bifurcación de Hopf mostrados anteriormente es notable. Aún así, la precisión con la que se ha calculado el punto de ramificación es más que sobrada a efectos prácticos.

**Ejemplo 2 (continuación)** Para  $\mu = 1/\cos(7\pi/16)$ , entre los valores  $\lambda = 0.3773$  y  $\lambda = 0.4203$  detectamos un cambio de signo en uno de los autovalores de  $f_u$ . Aplicamos el método de la secante como lo hemos descrito en esta sección tolerancia para el método de Newton igual a  $10^{-10}$  y tolerancia para el método de la secante 100 veces mayor, que son los valores con los que se han calculado los resultados mostrados en la continuación del Ejemplo 2 en la p. 28. Obtenemos que el método de la secante converge en tres iteraciones. Con tolerancia para el método de Newton igual a 10 veces  $2^{-52}$  y tolerancia para la secante 100 veces mayor obtenemos convergencia en cuatro iteraciones al valor  $\lambda^0 = 0.41574162033$  (donde mostramos solamente las cifras decimales que coinciden con los resultados obtenidos con tolerancia igual a  $10^{-10}$ ). Para este valor de  $\lambda^0$ , el autovalores de  $f_u$  de menor módulo lo tiene inferior a  $5 \times 10^{-16}$ . La razón por la que se obtienen resultados tan precisos en contraste con los del Ejemplo 1 se debe a la equivariancia por la simetría  $(u_1, u_2) \rightarrow (-u_1, u_2)$ . Al estar la todos los cálculos en la recta  $u_1 = 0$  y ser  $[1; 0]^T$  el autovector asociado al autovalor que se anula en  $\lambda^0$ , los cálculos se ven poco afectados por dicho autovalor nulo.

---

Rara vez se necesita localizar con precisión un punto de ramificación. Si se trata de una bifurcación con rotura de simetría se puede obrar del siguiente modo. Una vez detectado el punto de ramificación en una rama contenida en  $V_+$  (recuérdese (50) en p. 32) se calculan los autovectores  $v$  de  $f_u$  y  $w$  de  $f_u^T$  asociados al autovalor más pequeño en un punto cercano (en uno de los dos puntos entre los cuales hemos detectado la presencia del punto de ramificación). Se comprueba si  $Sv = -v$ , que nos permite conjeturar que se trata de una bifurcación con rotura de simetría. En tal caso, tal y como razonamos anteriormente,  $w$  es ortogonal a  $V_+$ . Por lo tanto podemos encontrar el punto de ramificación utilizando el método descrito en esta sección pero cambiando (55) por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} f(u, \lambda^{[n+1]}) + \sigma w &= 0, \\ w^T u &= 0, \end{aligned} \tag{56}$$

donde  $\sigma$  es una nueva variable de relleno que se añade al sistema. Nótese que si  $u \in V_+$ , de la relación  $Sf(u, \lambda) = f(Su, \lambda)$  se obtiene que  $f(u, \lambda) \in V_+$ , y por lo tanto independiente de  $w$ , de donde se deduce que si  $u \in V_+$ , la relación  $f(u, \lambda^{[n+1]}) + \sigma w = 0$  sólo es posible si  $\sigma = 0$  y  $f(u, \lambda^{[n+1]}) = 0$ . Señalemos por último que, en la practica, a la hora de resolver (56) por el método de Newton, se debe poner cuidado en tomar interantes iniciales que estén en  $V_+$ . De no hacerse así no hay garantía de que se obtenga el punto de ramificación.

Si el punto de ramificación que debemos calcular con precisión no se corresponde con un punto de ramificación, podemos resolver por el método de Newton el sistema

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) + \sigma w &= 0, \\ f_u^T w &= 0, \\ f_\lambda^T w &= 0, \\ w^T w - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{57}$$

(véase por ejemplo [2, § 7.8.4]), aunque hay procedimientos más sofisticados [2, § 7.8.4].

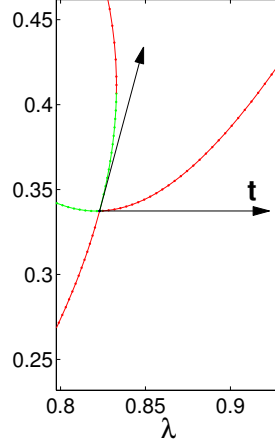
**Ejemplo 1 (continuación)** Volvemos a intentar calcular el punto de ramificación resolviendo el sistema (57) por el método de Newton con tolerancia  $10 \times 2^{-52}$ , y partiendo de  $\lambda = 0.8228$ , la solución de  $f(u, \lambda) = 0$  correspondiente a este valor de  $\lambda$ , tomando  $\sigma = 0$  y  $w$  el autovector de  $f_u$  asociado al autovalor de módulo mínimo. Tras cinco iteraciones obtenemos que el valor de  $\lambda$  es el mismo que en la iteración anterior, obteniéndose  $\lambda = 0.822988223197715$ . El autovalor de  $f_u$  de módulo más pequeño lo tiene inferior a  $2^{-52}$ .

---

## 6.3 Cambios de rama en un punto de ramificación

Supongamos que hemos calculado (con la técnica de continuación de la pseudolongitud de arco de Keller, por ejemplo) puntos en una rama de soluciones de  $f(u, \lambda) = 0$ , en la que hay un punto de ramificación  $(u^0, \lambda^0)$ , que hemos detectado y del que hemos calculado una aproximación  $(\tilde{u}^0, \tilde{\lambda}^0)$ . Nos planteamos en esta sección cómo calcular puntos sobre la rama que cruza.

La respuesta es bien sencilla: por medio de la técnica de continuación de la pseudolongitud de arco de Keller. Lo único que necesitamos es el punto de partida y la dirección de partida. El punto de partida puede ser la aproximación  $(\tilde{u}^0, \tilde{\lambda}^0)$  al punto de ramificación calculada previamente. La parte menos obvia es la dirección de salida. Ésta puede ser la del vector tangente a la rama que cruza en el punto de ramificación, como mostramos en este gráfico que corresponde a la bifurcación transcítica encontrada en el Ejemplo 1.



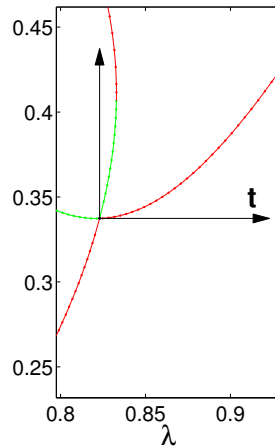
Tal y como argumentamos en la Sección 5.2.3, dicha tangente es combinación lineal

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{t}$  es el vector tangente a la rama sobre la que ya hemos calculado puntos en el punto de ramificación y  $v$  es no nulo y satisface  $f_u v = 0$  en el punto de ramificación. Los coeficientes de dicha combinación lineal son las soluciones de la ecuación (46), ligada a la ecuación algebraica de bifurcación vista en la p. 27, y cuyos coeficientes, definidos en (45) requieren para su cálculo las derivadas segundas de  $f$  (las matrices hessianas de cada una de las componentes de  $f$ ). Es por ello por lo que en la práctica se utiliza un vector tangente aproximado  $\hat{\mathbf{t}}$  que se obtiene ortogonalizando  $\mathbf{v}$  con respecto a  $\mathbf{t}$ , esto es

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{v} - (\mathbf{t}^T \mathbf{v}) \mathbf{t}. \quad (58)$$

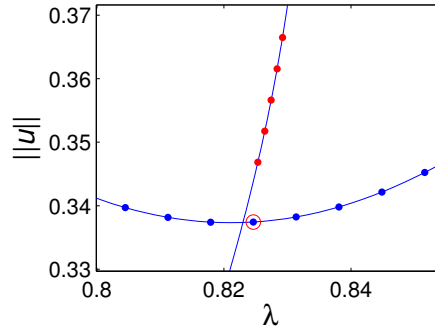
En la siguiente figura mostramos dicho vector en el caso mostrado anteriormente.



En la mayor parte de las situaciones prácticas, suele ser suficiente con este vector  $\hat{t}$ .

**Nota 4** Es más de hecho, en buena parte de los casos prácticos, no es necesario ni siquiera calcular ni una aproximación precisa al punto de ramificación  $(u^0, \lambda^0)$  ni al vector  $v$  satisfaciendo  $f_u v = 0$ . Basta normalmente con sustituir  $(u^0, \lambda^0)$ , por una aproximación, por ejemplo uno de los puntos entre los cuales detectamos la presencia del punto de ramificación  $(u^0, \lambda^0)$ ). En tal caso sustituimos  $v$  por el autovector de  $f_u$  asociado al autovalor de módulo más pequeño (el que cambia de signo en  $(u^0, \lambda^0)$ ).

**Ejemplo 1 (continuación).** Comprobamos lo dicho en la Nota ???. En la siguiente figura representamos el cruce de ramas en  $\lambda = 0.822988223197715$  que calculamos al final de la sección anterior, junto con los puntos calculados (en azul) sobre la rama en la que se detectó el punto de ramificación.



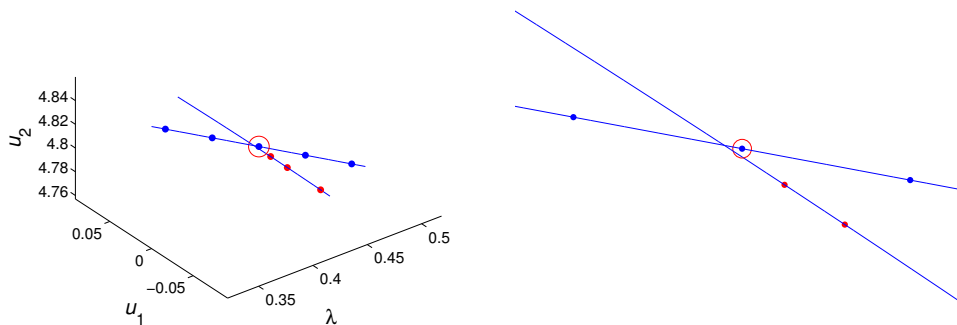
El más cercano de éstos al punto de ramificación (marcado con una circunferencia roja) se ha tomado como aproximación al punto de ramificación para calcular los puntos marcados en rojo en la rama que cruza. Como tangente inicial se ha tomado el vector  $\hat{t}$  definido en (58), siendo  $v$  en este caso el autovector de  $f_u$  asociado al autovalor de menor módulo. El vector  $\hat{t}$ , forma un ángulo de más de 30 grados con el vector tangente a la rama que cruza en el punto de bifurcación.

---

**Ejemplo 2 (continuación).** Aunque en este caso, gracias a tratarse de una bifurcación por rotura de simetría, no tuvimos problema en calcular con precisión el punto de ramificación en  $\lambda = 0.41574162033$  en la sección anterior, comprobamos ahora que no es necesario calcularlo con precisión para poder calcular puntos sobre la rama que cruza. Igual que en la continuación del Ejemplo 1 mostrado más arriba, en la siguiente figura (a la derecha, un detalle de la misma) vemos el cruce de ramas, los puntos (en azul) que calculamos sobre la rama en la que detectamos el cruce, el más cercano al cruce dentro de una circunferencia roja. Éste se ha tomado como aproximación al punto



de ramificación para calcular los puntos marcados en rojo en la rama que cruza.



Puede verse que, efectivamente, el punto de referencia para el cálculo del primer punto sobre la rama no coincide exactamente con el punto de ramificación. Ello no ha impedido, sin embargo, calcular puntos en la rama que cruza.

## 7 Cuestiones y Ejercicios

### CUESTIONES

**Ejercicio 1** Deduzca las ecuaciones del sistema (2).

**Ejercicio 2** Obtenga la matriz jacobiana de (4). Elabore un programa de MATLAB u OTAVE que implemente dicha matriz jacobiana. ¿Coincide con el mostrado al final de la Sección 1?

**Ejercicio 3** Dada una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^m$  ¿qué es la longitud de arco? De hecho, ¿qué se entiende por una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^m$ ? Repase sus conocimientos de geometría diferencial.

**Ejercicio 4** En la Sección 4, se determina la estabilidad del sistema (9) en función de la *parte real* de los autovalores de  $f_u$  (entendiendo por tanto que dichos autovalores pueden ser complejos), mientras que en el caso del sistema (10) se examina el signo de los autovalores (entendiendo por tanto que son reales). ¿Por qué son reales los autovalores de  $f_u$  en el caso del sistema (10)?

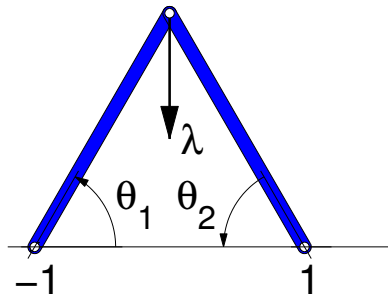
**Ejercicio 5** Reproduzca los cálculos hechos con el sistema  $u'' = f(u, \lambda)$  en la continuación del Ejemplo 2 en la Sección 4. Compruebe que obtiene las mismas figuras. Repita los cálculos pero añadiendo el término  $-0.1u'$  al segundo miembro, esto es, integre el sistema  $u'' = f(u, \lambda) - 0.1u'$ . ¿Qué obtiene?

**Ejercicio 6** Considere el sistema (10) y haga el cambio de variable

$$u = g(y)$$

donde suponemos que la matriz  $G(y) = g_y(y)$  jacobiana de  $g$  es invertible para todo  $y$ . Pruebe que  $y = y(t)$  es solución de (11) si y sólo si  $u(t) = g(y(t))$  es solución del sistema (10).

**Ejercicio 7** Considere el sistema  $u'' = f(u, \lambda)$ , donde  $f$  es la función (3) del Ejemplo 2 en la p. 3. Aplique el ejercicio anterior para expresar el sistema en términos de los ángulos que forman las barras con la horizontal, tal y como indicamos en la figura.



Puede ayudarse de las siguientes relaciones para expresar  $d_1$  y  $d_2$  en función de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

$$\begin{aligned} d_1 \cos(\theta_1) + d_2 \cos(\theta_2) &= 2, \\ d_1 \sin(\theta_1) - d_2 \sin(\theta_2) &= 0. \end{aligned}$$

**Ejercicio 8** Puede comprobar ahora que ha resuelto correctamente el Ejercicio 7 integrando el sistema obtenido en dicho ejercicio y comparando los resultados con los obtenidos con el sistema  $u'' = f(u, \lambda)$  en el Ejercicio 5.

**Ejercicio 9** Repase lo que aprendió de álgebra lineal en primero busque la prueba de (13). Si no le probaron dicho resultado, busque la prueba del mismo y apréndala. Haga lo mismo con (14).

**Ejercicio 10** Razone (de manera irrefutable y convincente para un alumno de primero) por qué (15) es cierto.

**Ejercicio 11** Razone por qué  $\sin X$  e  $Y$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$ , con  $X \subset Y$  y ambos tienen la misma dimensión, entonces son iguales.

**Ejercicio 12** Si  $S$  es una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^m$  en sí mismo que verifica que  $S^2 = I$  pruebe que

$$(S \mp I)^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad (S \mp I)v = v.$$

Deduzca que todo autovector generalizado de  $S$  es autovector de  $S$  y, por tanto,  $S$  diagonaliza.

## PROBLEMAS

**Problema 1** Elabore un programa de MATLAB u OCTAVE que implemente el método de continuación en el parámetro.

1. Pruebe su programa con el sistema del Ejemplo 2 para  $\mu = \sqrt{2}$  calculando 20 puntos con  $h = 0.02$ ,  $h_{\max} = 0.1$  y  $h_{\min} = 10^{-10}$ . Compare sus resultados con los mostrados al final de la Sección 2

2. Calcule 400 puntos con los mismos datos. ¿Qué obtiene? ¿Es razonable?

**Problema 2** Repita el problema anterior pero con la técnica de la pseudolongitud de arco de Keller.

**Problema 3** Modifique el programa de continuación en la pseudo longitud de arco para que calcule los autovalores en cada punto calculado y examine el número de autovalores positivos (o de parte real positiva).

1. Para  $\mu = \sqrt{2} = 1/\cos(\pi/4)$ , repita los cálculos hechos para el Ejemplo 2 en la p. 15 con su nuevo programa, y obtenga el mismo gráfico mostrado en dicha página.
2. Para  $\mu = 1/\cos(7\pi/16)$  (las barras en la configuración en reposo forman un ángulo con la horizontal de  $7\pi/16$ ) dibuje la configuración del pórtico en reposo. Compárelo con el caso  $\mu = 1/\cos(\pi/4)$ . ¿Cuál de los dos configuraciones en reposo le parece más estable?
3. Repita el apartado primero pero para  $\mu = 1/\cos(7\pi/16)$ . ¿Qué observa?

## Bibliografía

- [1] G. H. Golub & C. F. van Loan, *Matrix Computations. 4th Edition*, John Hopkins University Press, Baltimore, 2013.
- [2] W. Govaerts, *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [3] P. Hartam, *Ordinary Differential Equations. Sencod Edition*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [4] H. B. Keller, Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems, in *Applications of Bifurcation Theory*, (P. Rabinowitz ed.), Academic Press, 1977.
- [5] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995